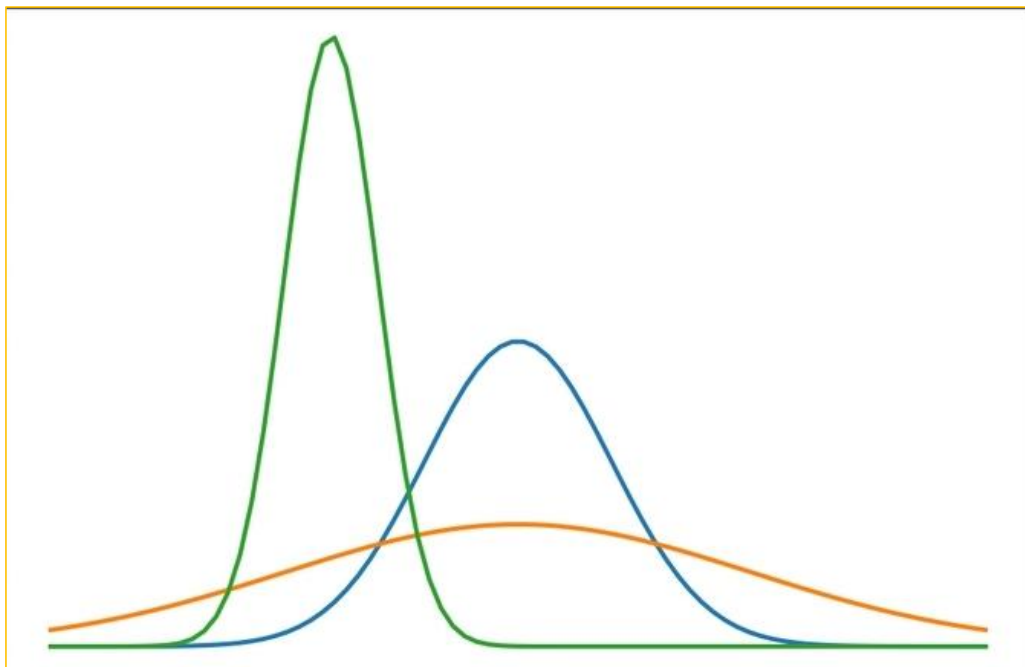




商洛學院
SHANGLUO UNIVERSITY

商洛学院课程思政案例库



课程名称： 概率论与数理统计

负责人： 杨 燕

编著时间： 2024 年 6 月

教务处印制

前言

习近平总书记在全国高校思想政治工作会议中指出“要坚持把立德树人作为中心环节，把思想政治工作贯穿教育教学全过程，实现全程育人、全方位育人，努力开创我国高等教育事业发展新局面”。2020年5月，教育部印发了《高等学校课程思政建设指导纲要》，对高校推进课程思政建设的重要性、如何推进高校课程思政提出了明确的和具体的要求，对各个高校做好课程思政教育教学改革确立了指导方针。《纲要》立足于教学工作，明确了课程思政建设“做什么、怎么做、谁来做”，对公共课、专业课、实践课各类课程，对文理工农医教艺各个学科专业，提出了非常明确、非常具体的要求。其中指出：“理工类课程要在教学中把马克思主义立场观点方法的教育与科学精神的培养结合起来，提高学生正确认识问题、分析问题和解决问题的能力，要注重科学思维方法的训练和科学伦理的教育，培养学生探索未知、追求真理、勇攀科学高峰的责任感和使命感”。

《概率论与数理统计》是高等院校理工、经管，农林类专业必修的一门专业基础课，主要研究自然界、人类社会及技术过程中大量随机现象的统计性规律。一方面，该课程具有其独特的研究内容，研究方法；另一方面，它与其他学科有着紧密的联系，其理论与方法已广泛应用于工业、农业、军事和科学技术中，同时也在向基础学科、工科渗透。通过本课程的学习能够使学生系统了解概率论的基本理论方法，掌握处理随机事件的基本思想

和方法，理解数理统计的基本思想和掌握基本的统计计算方法。它在培养学生的理性精神、逻辑推理能力、抽象思维能力、基本运算能力、随机事件应对能力、分析问题和解决实际问题的能力，处理数据能力和综合素质等方面有着独特和不可替代的作用，将进一步学习后续课程打下必要的基础。

本案例库是校级课程思政示范课程《概率论与数理统计》的建设成果，由课程团队教师杨燕、张东翰、王瑞，马春洁在长期实践教学基础上，整理教学案例，深入挖掘概率论与数理统计课程思政元素，最终形成的。案例库共包含 50 个案例，**六大育人主题：数学素养、优秀品质、文化自信、爱国情怀、社会责任和哲学原理**，知识点涵盖了教学大纲的所有内容。该案例库旨在找准思政教育与教学内容的切合点，将育人元素合理融入概率论与数理统计的教学过程中，做到“课程承载思政，思政寓于课程”的相融相合，将能力培养、知识传授以及价值引领有机统一，助力实现该课程“立德树人”的核心功能。

校内专家对各个案例评价后认为，编著者能依据“概率论与数理统计”课程的特点，以立德树人为根本任务，从多方面挖掘课程思政元素，并有机融入到课程教学中，充分发挥了该数学课程的育人功能，达到了“如盐溶于水”“润物细无声”的效果。

案例框架

概率论与数理统计课程思政案例库包含 6 个育人主题，共 50 个教学案例，每个育人主题包含的案例数量和案例编号详见表 1。该课程的思政案例库思维导图见图 1 所示。

表 1

育人主题	案例个数	案例编号
1.数学素养	12 个	PTMS—003; PTMS—006; PTMS—007; PTMS—010; PTMS—013; PTMS—019; PTMS—021; PTMS—022; PTMS—026; PTMS—033; PTMS—044; PTMS—046;
2.优秀品质	11 个	PTMS—005; PTMS—008; PTMS—012; PTMS—014; PTMS—017; PTMS—024; PTMS—028; PTMS—036; PTMS—037; PTMS—039; PTMS—040;
3.文化自信	4 个	PTMS—016; PTMS—018; PTMS—035; PTMS—038;
4.爱国情怀	9 个	PTMS—001; PTMS—015; PTMS—031; PTMS—034; PTMS—041; PTMS—043; PTMS—045; PTMS—049; PTMS—050;
5.社会责任	8 个	PTMS—011; PTMS—020; PTMS—023; PTMS—025; PTMS—027; PTMS—029; PTMS—030; PTMS—047;
6.哲学原理	6 个	PTMS—002; PTMS—004; PTMS—009; PTMS—032; PTMS—042; PTMS—048.

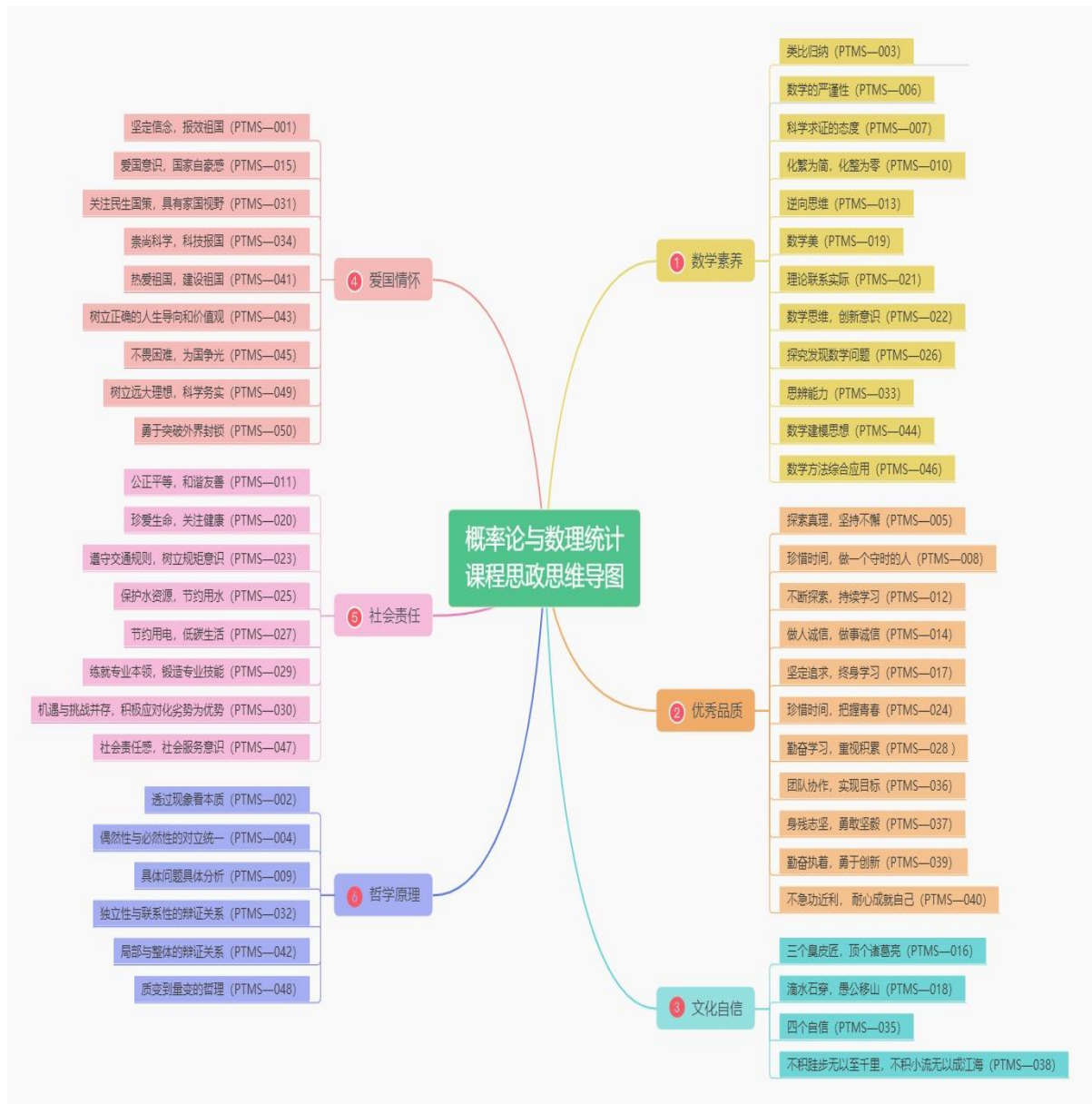


图 1 概率论与数理统计课程思政案例库思维导图

目 录

PTMS—001 绪论——中国概率论专家王梓坤院士	1
PTMS—002 随机现象——牛顿发现万有引力定律	5
PTMS—003 事件的关系和运算——韦恩图	8
PTMS—004 频率和概率——偶然性和必然性的辩证统一	11
PTMS—005 概率的统计定义——历史上著名的投掷硬币试验	14
PTMS—006 概率的公理化定义——柯尔莫哥洛夫和概率的公理化体系	17
PTMS—007 古典概型——放球模型	20
PTMS—008 几何概型——会面问题	23
PTMS—009 条件概率——农村包围城市的革命道路	26
PTMS—010 全概率公式——全球首个无人集群智能单元发布	29
PTMS—011 全概率公式的应用——抽签问题	32
PTMS—012 贝叶斯公式——贝叶斯和概率统计	35
PTMS—013 逆概率公式——法拉第的逆向思维和电磁感应定律	37
PTMS—014 贝叶斯公式的应用——贝叶斯公式解读寓言故事“狼来了”	40
PTMS—015 事件独立性的概念——炮击导弹问题	43
PTMS—016 事件独立性的应用——“三个臭皮匠，顶个诸葛亮”的典故	46
PTMS—017 伯努利概型——雅各布·伯努利及其家族	49
PTMS—018 小概率事件原理——“水滴石穿”	52
PTMS—019 随机变量——数学美	55
PTMS—020 二项分布的概念——新药治疗效果问题	57
PTMS—021 二项分布的概率计算——遗传学问题	60
PTMS—022 二项分布的应用——赌注问题	62
PTMS—023 二项分布的泊松近似——交通事故概率计算	65
PTMS—024 泊松分布的定义——航空安全问题	68
PTMS—025 泊松分布的计算——饮用水中的细菌数量	71
PTMS—026 连续型随机变量及其概率密度——身高分布	74
PTMS—027 连续型随机变量概率计算——供电量不足问题	78
PTMS—028 正态分布——高尔顿钉板试验	80

PTMS—029 正态分布的应用——招聘问题	84
PTMS—030 正态分布的标准化定理——交通线路选择问题	87
PTMS—031 二维离散型随机变量的联合分布律——婴儿出生问题	89
PTMS—032 随机变量的独立性——轮船停泊问题	92
PTMS—033 数学期望的定义——思辨能力	94
PTMS—034 数学期望的应用——核酸分组检测问题	96
PTMS—035 方差——我国脱贫攻坚政策	99
PTMS—036 协方差——个人努力与团队协作的关系	102
PTMS—037 切比雪夫不等式——著名数学家切比雪夫	105
PTMS—038 伯努利大数定律——“不积跬步，无以至千里；不积小流，无以成江海”的典故	108
PTMS—039 辛钦大数定律——著名数学家辛钦	111
PTMS—040 中心极限定理——量变和质变的关系	114
PTMS—041 统计学发展史——中国统计学领域的一代宗师许宝騄	117
PTMS—042 样本与总体——局部与总体的辩证关系	121
PTMS—043 参数估计——许宝騄教授献身祖国、献身科学的事迹	124
PTMS—044 矩估计法——电话交换台的人员配置问题	126
PTMS—045 极大似然估计法思想——杨倩勇夺奥运金牌	129
PTMS—046 极大似然估计法——苹果分装问题	132
PTMS—047 区间估计——调查某地区工薪阶层妇女从事家务劳动的时间	134
PTMS—048 假设检验的原理——量变到质变的哲理	136
PTMS—049 假设检验——试剂假阳问题	139
PTMS—050 单个正态总体方差的假设检验——中国沈阳机床突破国外封锁 ..	142

案例编号	PTMS—001
案例标题	绪论——中国概率论专家王梓坤院士
案例来源	原创
内容简介	向学生介绍我国概率论研究的先驱人物和主要学术带头人王梓坤院士的生平事迹，以及他为我国乃至世界的概率论发展做出的卓越贡献，激发学生的学习兴趣，引导学生努力学习，认真钻研概率论与数理统计学科，激发学生为中华民族伟大复兴而努力读书的爱国情怀。
关键词	概率论，王梓坤，爱国情怀
编写时间	2023-11-5
编著者	杨燕，副教授，商洛学院数学与计算机应用学院
素材形式	文字、图片等
育人主题	坚定信念，报效祖国的爱国情怀
素材长度	1674 字符
案例正文	1、知识点：绪论 介绍概率论与数理统计课程的课程性质，课程目标以及这门学科的发展历史和主要应用。 概率论是一门研究客观世界随机现象数量规律的数学分支学科。可以说，对客观世界中随机现象的分析产生了概率论。 数理统计学是一门研究怎样去有效地收集、整理和分析带有随机性的数据，以对所考察的问题作出推断或预测，直至为采取一定的决策和行动提供依据和建议的数学分支学科。 概率论是数理统计学的基础，数理统计学是概率论的一种应用。但是它们是两个并列的数学分支学科，并无从属关系。 2. 案例简介 我国概率论研究的先驱者之一——王梓坤院士 王梓坤，1929 年 4 月生，江西吉安人，我国著名数学家、中国科学院院士(图 1-1)，概率论研究的先驱和主要领导者，对我国科学和教育事业做出卓越贡献。

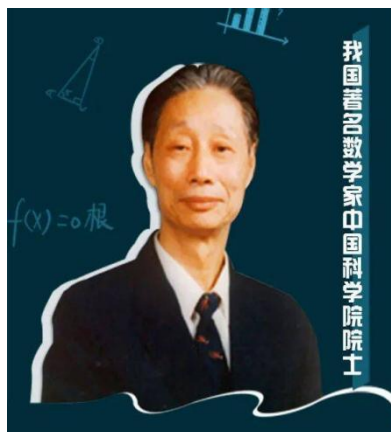


图 1-1 王梓坤（1929-）

年少时王梓坤家境并不宽裕，全家人仅靠租种几亩薄田勉强度日，但他以优异的成绩完成了初中、高中学业。1948 年，19 岁的王梓坤幸得同学的旅费资助，得以赴长沙参加大学招考，并以优异的成绩考中了他所报考的全部 5 所学校，而最终选择了有奖学金的武汉大学数学系。

1952 年 7 月，武大毕业后，王梓坤本来被分配到中国科学院读研究生，后因分配方案有变化，被改派到南开大学做助教，开始了他与南开 32 年的不解之缘。1954 年，王梓坤被学校推荐到苏联读研究生，在中国科学院数学研究所研究员关肇直的指导下，他选择了概率论，因为应用十分广泛，国内研究的人很少。同时，他了解到概率论是国家急需发展而力量又比较薄弱的数学分支之一，更加坚定了学概率的决心。书店里发现了的一本中文版的格涅坚科编著的《概率论教程》，成为他概率论学术生涯的起点。

1955 年 9 月，王梓坤进入莫斯科大学数学力学系学习，师从 20 世纪最有影响的数学家之一的柯尔莫戈洛夫，和聪明能干、业务出色的柯尔莫戈洛夫研究生多布鲁申，开启了他的研究生求学生涯。刚进入莫斯科大学的王梓坤感受到了巨大的压力。同期的苏联同学在大学三年级就已经系统地学习过概率论，而他除了自学了一本教程之外，从未经过任何系统全面的训练。起点低、基础差、非母语学习，让自认为天赋不过中等、最多中等偏上的王梓坤意识到，要想赶上其他同学的学习进度，就必须要比别人付出更多的努力，

啃下最难啃的骨头。在苏联留学三年，近乎修行的研读，最终让王梓坤一口一口地啃下了这个硬骨头。王梓坤经常用他的求学经历来鼓励学生：“任何一门学问，不光数学，钻进去了就会有兴趣。人生总得搏几回，拼搏一钻进去—产生兴趣—再拼搏钻进去产生兴趣，以形成良性循环。”



1958 年留苏生在莫斯科火车站合影（前排右二王梓坤）

图 1-2

1958 年 7 月，王梓坤获得博士学位，8 月，王梓坤回到南开，便争分夺秒地开始了攀登科学的高峰。经过他的努力和带动，在南开带出一支高水平的概率论科研队伍。王梓坤还非常重视学生的培养，在留学回国的前 6 年，他在南开大学开设了《随机过程论》和《概率论》两门课程，培养了不少研究生和本科生，其著作《随机过程论》《概率论基础及其应用》(图 1-3)《生灭过程与马尔可夫链》，

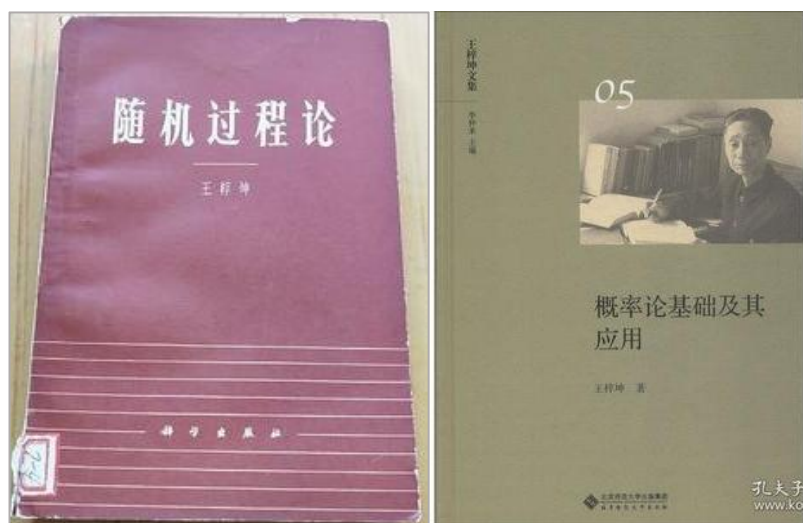


图 1-3

	被誉为概率论的三部曲，作为众多高校的大学教材，滋养了几代概率论学人，培养出了几代优秀的概率论研究者，为我国概率论教学和研究打下了坚实基础。 王梓坤还十分重视科学普及，出版了数十篇科普文章及两部科普著作，1984年王梓坤任北京师范大学校长期间首次提出“尊师重教”，带头在师大校园内形成尊师重教的良好氛围，是提出在全国设立教师节的倡议者之一。 王梓坤一生取得了诸多耀眼的成就，这离不开他对人生最重要的几点认识：理想、勤奋、坚持、方法、机遇，这简单的10个字也是对王梓坤数学人生的总结。 3. 思政融入 在介绍概率论与数理统计这门课程时，通过向学生介绍我国概率论研究的先驱人物和主要学术带头人——王梓坤院士的生平事迹，以及他为我国乃至世界的概率论发展做出的卓越贡献，让学生认识到概率论领域国内的著名学者及其成就。激发学生的学习兴趣，提升学生的民族自豪感，引导学生努力学习，认真钻研概率论与数理统计学科，激发学生为中华民族伟大复兴而努力读书的爱国情怀。
分析评价	本案例在介绍该课程时将我国概率论领域的杰出数学家王梓坤的故事适时引入课堂，用数学家的精神品质感染学生，引导学生坚定理想信念，努力学习，认真钻研概率论与数理统计学科，激发学生为中华民族伟大复兴而努力读书的爱国情怀。
评价者	程国教授，商洛学院数学与计算机应用学院

案例编号	PTMS-002
案例标题	随机现象——牛顿发现万有引力定律
案例来源	原创
内容简介	概率论与数理统计是揭示随机现象统计规律性的一门数学学科，在讲授随机现象的概念时，告诉学生随机现象虽然看似无序，但背后往往隐藏着一定的规律和模式。关键要透过现象看本质，通过深入观察和分析随机现象，揭示其背后的本质规律，从而更好地理解 and 预测这些现象。
关键词	随机现象，统计规律性，透过现象看本质
编写时间	2023-11-8
编著者	杨燕，副教授，商洛学院数学与计算机应用学院
素材形式	文字，图片
育人主题	透过现象看本质的哲学原理
素材长度	1437 字符
案例正文	1. 知识点：随机现象 自然界及人类的社会活动中普遍存在着两类现象，即必然现象和随机现象。 1) 必然现象 我们完全可以预知它在一定的条件下必然发生或必然不发生的现象称为确定性现象，也称必然现象(certain phenomenon)。 例如:向上抛一枚硬币，必然落下;函数在间断点处不存在导数。这类确定性现象的特点是:其结果总是确定的。 2) 随机现象 在一定的条件下我们无法准确预知其结果的现象，称为非确定性现象，也称随机现象(random phenomenon)。 例如:(1)向上抛一枚硬币，落下后可能正面向上，也可能正面向下;(2)某运动员投篮一次，可能投中，也可能投不中。 这类随机现象的特点是:其结果具有不确定性。 然而，在同一随机现象大量重复出现时，人们却发现了其固有

的规律性。比如，每一种现象可能的结果出现的频率具有稳定性。人们把这种随机现象在相同条件下大量重复出现时所表现出的某种量的规律性称之为随机现象的统计规律性。

概率论与数理统计就是以数量的方法来研究和揭示随机现象统计规律性的一门数学学科。

2. 案例简介

透过现象看本质典型例子——牛顿发现万有引力定律

伊萨克·牛顿，是 17 世纪人类最伟大的科学家，他是人类历史上屈指可数的几个科学巨人之一。他在物理学、数学和天文学方面的贡献，都是划时代的。

1642 年 12 月 25 日，牛顿出生在英国一个叫乌尔斯索普的小村子里，刚出生时极度衰弱，几乎夭折。牛顿自幼丧父、与母相依为命。1661 年，他进入剑桥大学的三一学院学习。

1665 至 1667 年间，牛顿已在思考引力的问题。一天傍晚，他坐在苹果树下乘凉、一个苹果从树上掉了下来。他忽然想到：为什么苹果只向地面落、而不向天上飞呢？他分析了哥白尼的日心说和开普勒的三定律，进而思考：行星为何绕着太阳而不脱离？行星速度为何距太阳近就快，远就慢？离太阳越远的行星，为何运行周期就越长？牛顿认为它们的根本原因是太阳具有巨大无比的吸引力。经过一系列的实验、观测和演算，牛顿发现太阳的引力与它巨大的质量密切相关。牛顿进而揭示了宇宙的普遍规律：凡物体都有吸引力；质量越大、吸引力也越大；间距越大、吸引力就越小。这就是经典力学中著名的万有引力定律（图 2-1）。根据牛顿的发现，可测定太阳和行星的质量，确定计算慧星轨道的法则，说明月亮和太阳的引力造成地球上的海洋潮汐现象，并推导出克服地球引力、飞向太阳系和飞出太阳系所需的最低速度，它们分别为每秒 7.9 千米、11.2 千米和 16.6 千米，并依次命名为第一、第二和第三宇宙速度。牛顿不但验证了前辈们的成果、而且为未来空间运载工具的最低推力或速度下限值、提供了精确而权威的科学依据。

牛顿将其一生的成就写在《自然哲学与数学原理》一书中。他发现了物体运动的三大定律，创立了微积分数学。他后来在谈到自己所取得的成就时说：“如果我比其他人看得远些，那是因为我站在巨人的肩膀上。”1727年3月20日凌晨、牛顿于久病不医中去世。据说在生命即将停止的时候、他的心情是坦荡而平静的。

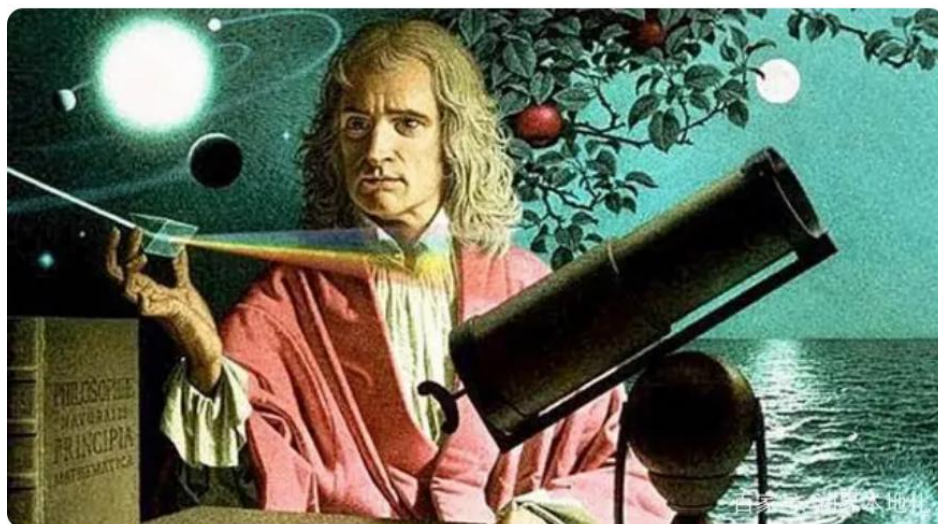


图 2-1 牛顿发现万有引力定律

3. 思政融入

在讲授随机现象的概念时，告诉学生随机现象虽然看似无序，但背后往往隐藏着一定的规律和模式。本课程的主要任务就是揭示随机现象的统计规律性，**透过现象看本质，通过深入观察和分析随机现象，揭示其背后的本质规律，从而更好地理解 and 预测这些现象。同时鼓励学生在学中大胆质疑和创新，揭示更多随机现象的本质，有助于我们制定更科学、更合理的决策和计划，同时推动数学、统计学、物理学、经济学等学科的发展。**

分析评价

本案例通过讲授随机现象的概念，引导学生要透过随机现象看到其本质，通过深入观察和分析随机现象，才能揭示其背后的本质规律。

评价者

程国教授 商洛学院数学与计算机应用学院

案例编号	PTMS—003
案例标题	事件的关系和运算——韦恩图
案例来源	原创
内容简介	在讲授事件之间的关系与事件的运算时用集合之间的关系与集合的运算来处理，借助表示集合之间关系的韦恩图，将事件的关系和运算直观，简洁的表示出来。以此告诉学生，数学的学习有很多方法，大家要善于发现不同事物的内在联系，学会用已有的简单工具和方法来解决新问题，将未知转化为已知，再轻松解决。
关键词	事件的关系和运算，韦恩图，集合
编写时间	2023-11-12
编著者	杨燕，副教授，商洛学院数学与计算机应用学院
素材形式	文字、图片等
育人主题	善于类比归纳的数学素养
素材长度	955 字符
案例正文	1. 知识点：事件的关系和运算 （1）事件的关系： 包含关系：$A \subset B$ (或 $B \supset A$)，事件 A 发生必然导致事件 B 发生。 相等关系：$A=B$，即 $A \subset B$ 而且 $B \subset A$。 互不相容：指事件 A 和事件 B 不可能同时发生，也称“互斥”，记作 $A \cap B = \emptyset$。 对立：$A \cup B = \Omega$ 且 $A \cap B = \emptyset$，称事件 A 与事件 B 互为逆事件（对立事件），A 的对立事件记为 $\bar{A}$，它表示“A 不发生”。 （2）事件的运算： 并（和）：记作 $A \cup B$，表示“事件 A 与 B 中至少有一个发生”。 交（积）：记作 $A \cap B$ 或 AB，表示“事件 A 与 B 同时发生”。 差：记作 $A - B$，表示“事件 A 发生但事件 B 不发生”。 2. 案例简介 韦恩图 韦恩图 (Venn Diagram, 也称文氏图或维恩图)，是表示集合的

一种图形法，用于显示元素集合重叠区域的图示。韦恩是英国的逻辑学家，生于 1834 年，1923 年去世。1880 年，维恩(John Venn)在《论命题和推理的图表化和机械化表现》一文中首次采用固定位置的交叉环形式再加上阴影来表示逻辑问题。这一表示方法，不仅让逻辑学家无比激动以致于 19 世纪后期、整个 20 世纪直到今天，还有许许多多的逻辑学家都对此潜心钻研，在大量逻辑学著作中维恩图占据着十分重要的位置。在剑桥大学的 Caius 学院的彩色玻璃窗上有对他的这个发明的纪念。

维恩图（图 3-1）可以帮助我们展示在不同的事物群组(集合)之间的数学或逻辑联系，尤其适合用来表示集合(或)类之间的“大致关系”，因此它常常被应用于数学学科中，尤其是被应用于集合论当中。此外，韦恩图应用的范围很广泛，包括各自然科学、人文科学等各领域。韦恩图在解决一些实际问题中，由于其直观，往往具有特殊的功效。

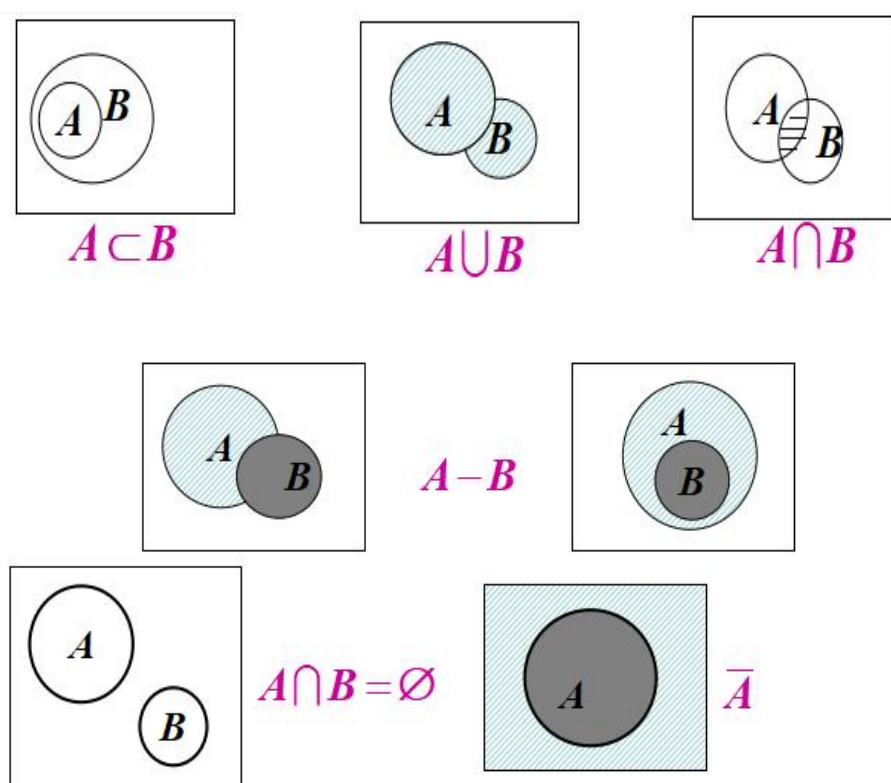


图 3-1 韦恩图（Venn）

3. 思政融入

	由于随机试验 E 的所有基本结果（样本点）组成的集合称为样本空间（Sample space），记作 Ω。样本空间 Ω 的子集称为 E 的随机事件（Random event），用大写字母 $A, B, C, \dots$ 表示。由此看来随机事件也都是以样本点为元素的集合，因此在讨论事件之间的关系与事件的运算时就可以用集合之间的关系与集合的运算来处理。借助表示集合之间的韦恩图，将事件的关系和运算直观，简洁的表示出来。以此告诉学生，数学的学习有很多方法，同学要善于类比发现不同事物的内在联系，学会用已有的简单工具和方法来解决新问题，将未知转化为已知，再轻松解决。  图 3-2 用已有方法解决新问题
分析评价	借助表示集合之间关系的韦恩图，将事件的关系和运算直观，简洁的表示出来。使学生领悟到生活中可借助已有的简单工具和方法来解决比较复杂问题的智慧，以此告诉学生，数学的学习有很多方法，要善于类比，发现不同事物的内在联系，学会用已有的简单工具和方法来解决新问题，将未知转化为已知，再轻松解决。思政融入自然贴切。
评价者	程国教授，商洛学院数学与计算机应用学院

案例编号	PTMS—004
案例标题	频率和概率——偶然性和必然性的辩证统一
案例来源	原创
内容简介	在介绍频率和概率的关系时，告诉学生频率和概率是辩证关系，体现了偶然性和必然性的对立统一。事件的频率具有偶然性，而事件的概率具有必然性。频率之所以可以近似代替概率就是因为“频率的稳定性”这个本质的规律。同时告诉学生，偶然性的背后隐藏着必然性，鼓励学生好好学习、努力付出，当机遇来临，也一定会成功的。
关键词	频率，概率，必然性和偶然性的辩证统一
编写时间	2023-11-20
编著者	杨燕，副教授，商洛学院数学与计算机应用学院
素材形式	文字，图片
育人主题	偶然性和必然性辩证统一的哲学原理
素材长度	1265 字符
案例正文	1. 知识点：频率 频率的概念，描述了事件发生的频繁程度。 定义 设在相同的条件下，进行了 n 次试验。若随机事件 A 在 n 次试验中发生了 k 次，则比值 k/n 称为事件 A 在这 n 次试验中发生的频率（Frequency），记为 $f_n(A) = k/n$。 由定义容易推知，频率具有以下性质： 1° 对任一事件 A，有 $0 \leq f_n(A) \leq 1$； 2° 对必然事件 Ω，有 $f_n(\Omega) = 1$； 3° 若事件 A, B 互不相容，则 $f_n(A \cup B) = f_n(A) + f_n(B)$ 一般地，若事件 $A_1, A_2, \dots, A_m$ 两两互不相容，则 $f_n\left(\bigcup_{i=1}^m A_i\right) = \sum_{i=1}^m f_n(A_i)。$ 2. 案例简介

必然性和偶然性的辩证统一

必然性和偶然性是哲学上的一对重要范畴，是唯物辩证法的重要范畴之一，马克思和恩格斯对此都有论述，比较完整的唯物辩证法观点的确立主要见于恩格斯的《自然辩证法》。

必然性和偶然性揭示了事物发展中的两种不同趋势。所谓必然性是指客观事物联系和发展的合乎规律的、确定不移的趋势，是在一定条件下的不可避免性和确定性。偶然性则与之相反，是指事物发展的必然过程中呈现出来的某种摇摆、偏离，是可以这样出现也可以那样出现的不确定的趋势。必然性与偶然性的关系是对立统一的关系，它们之间的统一首先表现在两者总是互相联系、互相依存的，没有纯粹的偶然性，也没有纯粹的必然性。其次表现在两者能够在一定条件下相互过渡、相互转化。两者在事物的联系和发展过程中所起的作用是不同的。事物发展的原因是复杂而非单一的，往往是内部和外部、主要的和次要的等多种原因综合起作用的结果。必然性产生于事物内部的主要原因，而偶然性则产生于事物外部的次要原因。因此，必然性在发展过程中居于支配地位，决定事物发展的前途和方向，偶然性一般只居于从属的地位，对发展的必然过程起着促进或延缓的作用。对于这对范畴，马克思在博士论文、恩格斯在《自然辩证法》(图 4-1)中都有论述。

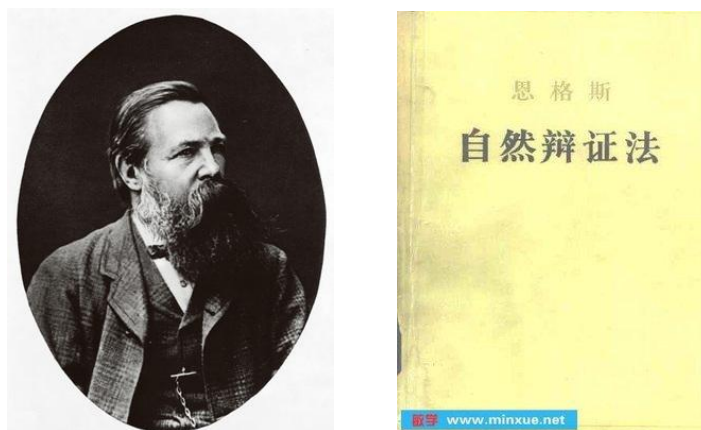


图 4-1 恩格斯和《自然辩证法》

恩格斯认为，必然性和偶然性都是客观存在的，也是相互联系的，自然界中的一切现象都不是纯粹必然的，也不是纯粹偶然的，

	两者总是相互联系而存在，必然性要通过大量的偶然性表现出来，偶然性的背后隐藏着必然性。 3. 思政融入 在介绍频率和概率的关系时，告诉学生频率和概率是辩证关系，体现了偶然性和必然性的对立统一。事件的频率是个试验值，具有偶然性，可能取多个不同值。而事件的概率是客观存在的，具有必然性，只能取唯一值。试验次数很少时，概率与频率有很大的偏差，这是对立性；试验次数很大时，频率呈现出稳定性，它在事件的概率附近摆动，这是统一性。恩格斯指出“在表面偶然性起作用的地方，这种偶然性始终是受内部隐蔽的规律支配的，而我们的问题只是在于发现这些规律。”频率之所以可以近似代替概率就是因为“频率的稳定性”这个本质的规律。同时告诉学生，偶然性的背后隐藏着必然性，每一个偶然性的成功都不是纯粹的幸运，而是隐藏在背后的必然性作用的结果，必然性存在于每一个机遇、每一个偶然性之中。鼓励学生好好努力认真学习，不要害怕现在努力学习的东西会没有用武之地，要坚信努力学习才是获得成功的秘诀和主要原因，这就是必然性，当机遇来临，你也一定会成功的。运气是偶然性的体现，我们无可奈何，而坚守就是要守那个必然性。
分析评价	本案例在介绍频率和概率的关系时，将两者的关系用唯物辩证法中偶然性和必然性的辩证统一理论解释，让学生更容易理解相关概念。同时让学生明白偶然性和必然性之间的关系，使学生体会到每一个偶然性的成功都不是纯粹的幸运，而是隐藏在背后的必然性作用的结果，告诉学生努力学习才是获得成功的秘诀和主要原因，而绝非只是运气，思政育人不知不觉就已抵达学生内心深处。
评价者	程国教授，商洛学院数学与计算机应用学院

案例编号	PTMS—005
案例标题	概率的统计定义——历史上著名的投掷硬币试验
案例来源	原创
内容简介	通过介绍历史上许多著名科学家如德·摩根、蒲丰、费勒、皮尔逊和罗曼洛夫斯基的大量掷硬币试验，验证“频率的稳定性”同时引出概率的统计定义。告诉学生，为探究科学真理，科学家们付出了很多艰辛的努力，启发学生“坚持的重要性”，无论学习还是生活都要学习科学家们锲而不舍的科学精神。
关键词	频率，概率，随机试验
编写时间	2023-11-18
编著者	杨燕，副教授，商洛学院数学与计算机应用学院
素材形式	文字、图片，表格
育人主题	锲而不舍，探索真理的优秀品质
素材长度	1295 字符
案例正文	1. 知识点：概率的统计定义 定义 设事件 A 在 n 次重复试验中发生的次数为 k，当 n 很大时，频率 k/n 在某一数值 p 的附近摆动，而随着试验次数 n 的增加，发生较大摆动的可能性越来越小，则称数 p 为事件 A 发生的概率，记为 $P(A) = p$。 2. 案例简介 历史上著名的投掷硬币试验， 为了研究随机现象及其统计规律性，必须对随机现象进行大量重复的观察或试验，对随机现象所进行的观察或试验成为随机试验（random experiment），简称试验。 一个随机事件在一次试验中可能发生，也可能不发生，虽然我们在试验前不能确定它到底会不会发生，但是我们希望能够度量事件出现的可能性大小，把用来刻画事件发生可能性大小的数，称为事件发生的概率。在概率论发展初期，概率是用频率来定义的，这种定义被称为概率的统计定义，它的优点是比较直观，但是，通过频率来求概率，需要做的试验次数多，费时、费力、费财，并且不严格，也不利于理论上的推广。

为了探究频率与概率之间的关系，历史上许多著名的科学家(图 5-2)们如德·摩根 (De Morgan)、蒲丰 (Buffon)、费勒 (Feller)、皮尔逊 (Pearson)和罗曼洛夫斯基 (Romanovsky) 曾进行过大量掷硬币试验，所得结果如表 5-1 所示。

表 5-1

试验者	掷硬币次数 n	出现正面次数 k	出现正面的频率 k/n
蒲丰	4040	2048	0. 5069
德·摩根	4092	2048	0. 5181
费勒	10000	4979	0. 4979
皮尔逊	12000	6019	0. 5016
皮尔逊	24000	12012	0. 5005
罗曼洛夫斯基	80640	39699	0. 4923



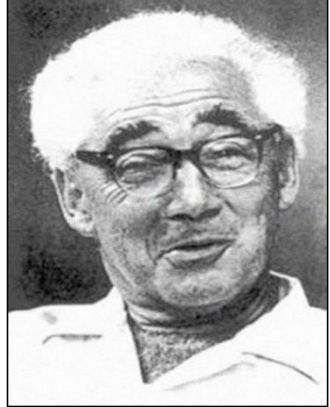
德·摩根 法国数学家 (1806-1871)



蒲丰 法国数学家 (1707-1788)



皮尔逊 英国数学家 (1857-1936)



费勒 英国数学家 (1857-1936)

图 5-2

案例正文	试验表明：虽然每次抛掷硬币前无法准确预知其结果将出现正面还是反面，但大量重复试验后，出现正面和反面的次数大致相当，即各占总试验次数的比例大致为 0.5，并且随着试验次数的增加，这一比例更加稳定地趋于 0.5。这说明虽然随机现象在少数几次观察或试验中并无规律可循，具有不确定性或随机性，但通过长期观察或大量重复的试验可以发现随机试验自身所固有的规律性。 由表格数据可见出现正面的频率总在 0.5 附近摆动，随着试验次数增加，它逐渐稳定于 0.5。这个 0.5 就反映正面出现的可能性的。每个事件都存在一个这样的常数与之对应，因而可将频率 $f_n(A)$ 在 n 无限增大时逐渐趋向稳定的这个常数定义为事件 A 发生的概率。这就是概率的统计定义。 3. 思政融入 在介绍概率的统计定义时，引入历史上许多著名科学（德·摩根、蒲丰、费勒、皮尔逊和罗曼洛夫斯基）的大量掷硬币试验，既验证“频率的稳定性”又引出概率的统计定义。告诉学生，把一件简单的事情坚持不懈做下去就是不简单，投掷一次硬币很简单，但为探究科学真理，科学家们投掷了成千上万次，付出了很多艰辛的努力，发现了其中的统计规律。以此故事启发学生懂得“坚持的重要性”，无论学习还是生活中都要学习科学家们锲而不舍的科学精神，朝着自己认定的目标努力坚持下去，一定会收获意想不到的惊喜和成功。
分析评价	本案例介绍概率的统计定义，用科学家们成千上万次掷硬币的试验故事让学生明白做任何事情时“坚持的重要性”，鼓励学生要有锲而不舍，坚持不懈的学习意识和奋斗精神。思政引入自然且有效，让学生理解了知识点的同时还获得了思政教育。
评 价 者	程国教授，商洛学院数学与计算机应用学院

案例编号	PTMS-006
案例标题	概率的公理化定义——柯尔莫哥洛夫和概率的公理化体系
案例来源	原创
内容简介	概率的公理化体系，使得概率论建立在严密的逻辑基础上，在讲授概率的公理化定义时，向学生介绍公理化的思想和历史，拓宽学生的知识面，以此培养学生科学的思维方式和严谨的科学态度。概率的严格数学定义是1933年苏联数学家柯尔莫哥洛夫首次提出的，经历了漫长的探索历程，以此鞭策学生静心学习、潜心钻研。
关键词	概率，公理化定义，柯尔莫哥洛夫
编写时间	2023-11-30
编著者	杨燕，副教授，商洛学院数学与计算机应用学院
素材形式	文字、图片
育人主题	数学的严谨性
素材长度	1292 字符
案例正文	1. 知识点：概率的公理化定义 定义 设Ω为样本空间，A为事件，对于每一个事件A赋予一个实数，记作$P(A)$，如果$P(A)$满足以下条件： 1° 非负性：$P(A) \geq 0$； 2° 规范性：$P(\Omega) = 1$； 3° 可列可加性：对于两两互不相容的可列无穷多个事件$A_1, A_2, \dots, A_n, \dots$，有 $P\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n\right) = \sum_{n=1}^{\infty} P(A_n)$ 则称实数$P(A)$为事件A的概率（Probability）。 概率的公理化体系，使得概率论建立在严密的逻辑基础上，这个定义既概括了历史上几种概率定义中的共同特征，又避免了各自的局限和不足。有了这个公理化定义，概率论得到了快速的发展。 2. 案例简介

柯尔莫哥洛夫和概率的公理化体系

在概率论的发展历史上，曾有过概率的统计定义、概率的古典定义、概率的几何定义和概率的主观定义，这些定义各适合一类随机现象。那么如何给出适合一切随机现象的概率的最一般的定义呢？1900年数学家希尔伯特(Hilbert, 1862-1943)提出要建立概率的公理化定义以解决这个问题，即以最少的几条本质特性去刻画概率。1933年苏联数学家柯尔莫哥洛夫(Kolmogorov, 1903-1987)(图6-1)首次提出了概率的公理化定义，这个定义既概括了历史上几种概率定义中的共同特性，又避免了各自的局限性和不足之处，它用三条公理的满足来定义概率。这一公理化体系迅速获得举世公认，是概率论发展史上的一个里程碑。有了这个公理化定义，概率论得到了快速的发展。



安德列·柯尔莫哥洛夫
(1903.4.25-1987.10.20)

图 6-1

柯尔莫哥洛夫是苏联一位杰出的数学家、教育家，他对数学领域的许多学科，特别是现代概率论的发展作出了重大贡献，在60多年的教师生涯中，他培养了一大批优秀人才，功勋卓著。柯尔莫哥洛夫于1903年4月25日出生于俄罗斯坦博夫城，由于他的杰出贡献，1980年他获得了有数学界诺贝尔奖之称的沃尔夫奖。柯尔莫哥洛夫是20世纪俄国最有影响的数学家，而且还是美、法、意、荷、英等国的院士或皇家学会会员，是三次列宁勋章的获得者，他从不夸谈自己的成就、头衔与地位，并不看重金钱与物质条件，他

	把巴尔桑奖的奖金捐给了学校图书馆，他也未曾领取沃尔夫奖金。柯尔莫哥洛夫为科学事业无私地贡献了他光辉的一生。 任何一个数学概念都是对现实世界的抽象，这种抽象使其具有广泛的适应性。概率的频率解释为定义概率提供了经验基础，但不能作为一个严格的数学定义。从概率论有关问题的研究算起，经过近三个世纪的漫长探索历程，人们才真正完整地解决了概率的严格数学定义。1933年，苏联的著名数学家柯尔莫哥洛夫，在他的《概率论的基本概念》一书中系统地表述了现在已被广泛接受的概率的公理化体系，第一次将概率论建立在严密的逻辑基础上。 3. 思政融入 结合背景知识，在介绍概率的公理化定义时，向学生介绍公理化的思想和历史，拓宽学生的知识面，使学生了解数学中的公理化思想是一种重要的思想，是科学发现和发展的基石，以此培养学生的科学思维，和严谨的科学态度，深刻感受数学的严谨性。 从概率论有关问题的研究算起，经过近三个世纪的漫长探索历程，人们才真正完整地解决了概率的严格数学定义。以此告诉学生，科学研究不是一蹴而就的，每一个新的理论的产生都需要科学家们付出艰辛的努力，鞭策学生静心学习、潜心钻研。
分析评价	概率的公理化体系，使得概率论建立在严密的逻辑基础上，介绍这个数学概念时既介绍公理化的思想和历史，来拓宽学生的知识面，培养学生科学的数学思维方式，创新意识、严谨作风。同时将数学家的故事带入课堂，用他们敢于挑战、勇攀高峰的精神，深深感染学生，鞭策学生正视自己、正视困难，不畏荆棘，勇敢向前，形成良好的学习品质。
评价者	程国教授，商洛学院数学与计算机应用学院

案例编号	PTMS-007
案例标题	古典概型——放球模型
案例来源	原创
内容简介	本案例将古典概型的经典模型放球模型,用于解决学生身边的“生日问题”,提高了学生学习兴趣,同时也将定量计算的重要性和科学求证的科学素养等思政教育传递给学生,培养学生相信科学,勇于钻研、严谨细致、精益求精的良好品质。
关键词	古典概型, 古典概率, 放球模型, 生日问题
编写时间	2023-12-1
编著者	杨燕, 副教授, 商洛学院数学与计算机应用学院
素材形式	文字、图片等
育人主题	科学求证的态度和精益求精的探索精神。
素材长度	1027 字符
案例正文	1. 知识点：古典概型和古典概率 定义 若随机试验 E 满足以下条件： (1) 样本空间 Ω 只有有限个样本点, $\Omega = \{\omega_1, \omega_2, \dots, \omega_n\}$; (2) 基本事件的发生是等可能的, 即 $P(\{\omega_1\}) = P(\{\omega_2\}) = \dots = P(\{\omega_n\}),$ 则称此试验为古典概型, 或称为等可能概型。 设事件 A 包含 k 个基本事件, $A = \{\omega_{i_1}\} \cup \{\omega_{i_2}\} \cup \dots \cup \{\omega_{i_k}\}$, 则有 $P(A) = P(\{\omega_{i_1}\} \cup \{\omega_{i_2}\} \cup \dots \cup \{\omega_{i_k}\})$, $= \frac{1}{n} + \frac{1}{n} + \dots + \frac{1}{n} = \frac{k}{n}.$ 由此, 得古典概型中事件 A 的概率计算公式 $P(A) = \frac{k}{n} = \frac{A \text{ 所包含的样本点数}}{\Omega \text{ 中样本点总数}}.$ 称古典概型中事件 A 的概率为古典概率。 古典概型的“五步走”解题步骤：审 E, 找 n, 设 A, 求 k, 算 P。

2. 案例简介

典型的古典概型——放球模型

将 m 个不同编号的小球随机放入 $N(N > m)$ 个盒子中(图 7-1), 设每球都以同样的概率 $1/N$ 放入任一个盒子中, 盒子容量不限, 求

- (1) 恰好有 m 个盒子, 其中各有一球的概率;
- (2) 至少有两球在同一个盒子中的概率。

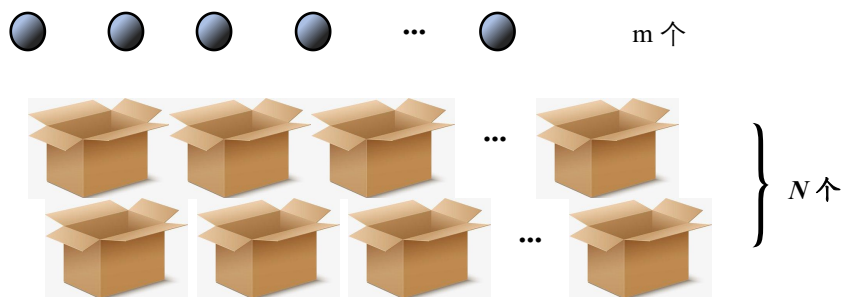


图 7-1

解 (1)按“五步走”步骤求解:

审 E : E —放球;

找 n : $n = \underbrace{N \cdot N \cdots N}_{m \text{ 个}} = N^m$

设 A : A_1 —恰好有 m 个盒子, 其中各有一球

求 k : $k_1 = C_N^m \cdot m! = P_N^m$

算 P : $P(A_1) = \frac{P_N^m}{N^m}$

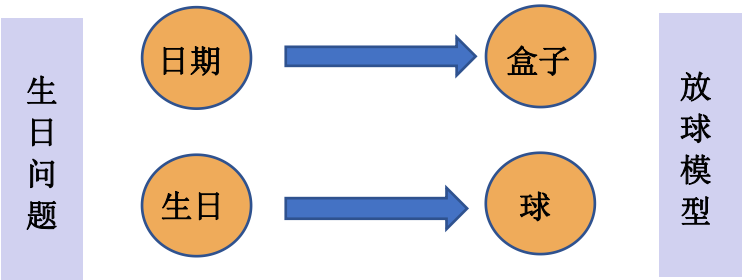
(2)设 A_2 —至少有两球在同一个盒子中, 通过分析发现 A_2 的对立事件就是 A_1 , 故 $P(A_2) = 1 - P(\bar{A}_2) = 1 - P(A_1) = 1 - \frac{P_N^m}{N^m}$ 。

作为放球模型的应用, 分析求解生日问题

“生日问题”: 假设每人的生日在一年 365 天中的任一天是等可能的, 在我们这个 64 人的班级中, 至少有两同学生日相同的概率为多大呢?

先让学生通过感性认识估计概率的大小: 1%, 10%, 20%, 30%.....? 为与计算结果形成巨大反差, 埋下伏笔。

分析放球模型中小球与盒子和生日问题中生日与日期的关系,

案例正文	见图 7-2。  图 7-2 设事件 B—64 人中至少有两人生日相同。 将 365 天看作 365 个盒子，一个盒子对应一天，至少两人生日相同，也就是至少有两个球在同一个盒子中，所以由放球模型中的第 2 问结论可知 $P(B) = 1 - \frac{C_{365}^{64} 64!}{365^{64}} = 0.997$ 这个结果令人意想不到，甚至会让大多数人惊奇，因为这个概率并不如人们直觉中想象的那样小，而是相当大。这也告诉我们，“直觉”并不很可靠，说明研究随机现象统计规律是非常重要的。 3 思政融入 在讲解古典概型的概率计算时，介绍经典的放球模型，并用放球模型解决学生身边的“生日问题”，激发了学生的学习兴趣。并从感性估计概率的值与理性实际计算结果形成的巨大反差中让学生认识到感性认识与理性计算的差异，让学生了解定量计算的重要性，同时告诫学生，数学的学习不能只凭主观“直觉”，“直觉”并不很可靠，要有科学求证的态度和精益求精的探索精神。
分析评价	本案例将古典概型的经典模型放球模型，应用解决学生身边的“生日问题”，提高了学生学习兴趣的同时，也将定量计算的重要性和科学求证的科学素养传递给学生，培养学生相信科学，勇于钻研、严谨细致、精益求精的良好品质。
评价者	程国教授，商洛学院数学与计算机应用学院

案例编号	PTMS-008
案例标题	几何概型——会面问题
案例来源	原创
内容简介	会面问题是几何概型中一个典型的概率问题,通过概率知识求解会面问题,强化学生的时间观念和效率意识,引导学生做一个守时的人,告诉学生守时是一种美德,代表着礼貌和信誉,守时也会让一个人更容易获得机会,取得成功。也可以通过所学的概率统计知识更好的预测随机事件发生的概率,从而制定出更合理的计划和策略,增强学生对随机事件的预测和应当能力。
关键词	几何概型, 会面问题, 时间观念, 效率意识
编写时间	2023-12-18
编著者	杨燕, 副教授, 商洛学院数学与计算机应用学院
素材形式	文字, 图片
育人主题	引导学生生活中做一个诚信守时的人, 强化时间观念和效率意识。
素材长度	853 字符
案例正文	1. 知识点：几何概型 古典概型的计算, 只适用于具有等可能性的有限样本空间, 若试验结果无穷多, 它显然已不适合。为了克服有限的局限性, 可将古典概型的计算加以推广为几何概型。 设试验具有以下特点: 1° 样本空间Ω是一个几何区域, 这个区域大小可以度量(如长度、面积、体积等), 并把Ω的度量记作 $m(\Omega)$。 2° 向区域Ω内任意投掷一个点, 落在区域内任一个点处都是“等可能的”。或者设落在Ω中的区域 A 内的可能性与 A 的度量 $m(A)$ 成正比, 与 A 的位置和形状无关。不妨也用 A 表示“掷点落在区域 A 内”的事件, 那么事件 A 的概率可用下列公式计算: $P(A) = \frac{m(A)}{m(\Omega)}$ 称它为几何概率。

2. 案例简介

几何概型的典型例子——会面问题

两人相约在某天下午 2:00~3:00 在预定地方见面, 先到者要等候 20 分钟, 过时则离去。如果每人在这指定的一小时内任一时刻到达是等可能的, 求约会的两人能会到面的概率。

设 x, y 为两人到达预定地点的时刻, 那么, 两人到达时间的一切可能结果落在边长为 60 的正方形内, 这个正方形就是样本空间 Ω , 而两人能会面的充要条件是 $|x-y| \leq 20$, 即

$$x-y \leq 20 \text{ 且 } y-x \leq 20。$$

令事件 A 表示“两人能会到面”, 这区域如图 8-1 中的 A 。

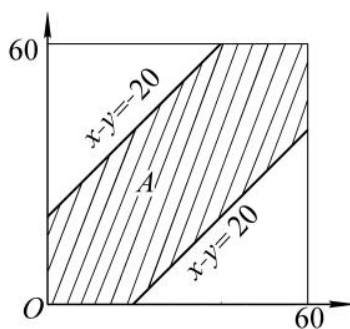


图 8-1

则

$$P(A) = \frac{m(A)}{m(\Omega)} = \frac{60^2 - 40^2}{60^2} = \frac{5}{9}$$

会面问题续:

(1) 若将等候时间缩短为 10 分钟, 则 A 的区域会变小, 会面的概率也会减小, 为

$$P(A) = \frac{m(A)}{m(\Omega)} = \frac{60^2 - 50^2}{60^2} = \frac{11}{36}$$

(2) 若将等候时间延长为 30 分钟, 则 A 的区域会变大, 会面的概率也会增大, 为

$$P(A) = \frac{m(A)}{m(\Omega)} = \frac{60^2 - 30^2}{60^2} = \frac{25}{36}$$

	3. 思政融入 在讲解会面问题时告诉学生守时是一种美德，代表着礼貌和信誉。懂得珍惜时间、管理时间的人，能让自己无论在做什么事的时候都能够轻松应对、游刃有余。一个守时的人必将获得别人的尊重。守时是对自己的约束，也是对自己和他人负责，做一个守时的人，一个一丝不苟的人。守时也会让一个人更容易获得机会，取得成功。 图 8-2 同时，为了获得更大的见面几率，我们也可以通过学习和掌握的概率统计知识更好的预测随机事件发生的概率，从而制定出更合理的计划和策略。或者当随机事件发生时，我们也需要保持冷静和应对能力，及时调整计划和策略，以应对各种挑战。
分析评价	本案例通过概率知识求解几何概型中典型的会面问题，强化学生的时间观念和效率意识，引导学生做一个守时的人。培养学生通过所学的概率统计知识更好的预测随机事件发生的概率，增强学生对随机事件的预测和应当能力。
评价者	程国教授，商洛学院数学与计算机应用学院

案例编号	PTMS-009
案例标题	条件概率——农村包围城市的革命道路
案例来源	原创
内容简介	条件概率描述了给定一个事件发生的条件下，另一个事件发生的概率，在讲授条件概率的数学定义时，将条件概率的思维方式与“具体问题具体分析”方法论完美契合，教导学生具体问题具体分析，要根据具体情境和条件来分析和解决问题，不能一刀切、一概而论，将科学的思维方式传递给学生。
关键词	条件概率，具体问题具体分析
编写时间	2024-1-8
编著者	杨燕，副教授，商洛学院数学与计算机应用学院
素材形式	文字，图片
育人主题	“具体问题具体分析”的哲学思想
素材长度	988 字符
案例正文	1. 知识点：条件概率 在现实中，往往遇到“在事件 B 已经发生的前提下，求事件 A 发生”的概率，这类问题就是条件概率问题。 定义 1(条件概率) 设 A, B 是随机试验 E 的两个事件, 且 $P(A) > 0$, 则称 $P(B A) = \frac{P(AB)}{P(A)}$ 为事件 A 发生的条件下事件 B 发生的条件概率。 类似地，定义事件 B 发生的条件下事件 A 发生的条件概率为： $P(A B) = \frac{P(AB)}{P(B)} \quad (P(B) > 0)$ 说明：（1）条件概率也是概率，符合概率定义中的三个条件： 非负性；正规性，可列可加性。 （2）一般情况下，条件概率 $P(B A)$ 与无条件概率 $P(B)$ 不会相同。

2. 案例简介

农村包围城市—毛泽东等中国共产党人创立的革命道路



图 9-1

农村包围城市的革命道路(见图 9-1)，是以毛泽东为代表的中国共产党人在领导中国革命实践中逐步摸索出来的一条具有中国特色的发展道路和总战略。其基本内容是，中国民主革命首先在敌人统治力量比较薄弱的农村，发动农民武装起义，建立人民军队，建立革命根据地，把武装斗争、土地革命、建立政权结合起来，使之建成支持长期革命战争的战略基地。依托根据地积累发展革命力量，随着革命战争、人民武装和根据地的发展，逐步造成农村包围城市的战略态势，最后夺取全国胜利。

走"农村包围城市"道路的原因是：1、中国特色的城乡关系，即中国的城市不能完全统治农村，广大的人力物力在农村。2、农村可以离开城市而相对独立存在。3、地方性农业经济占主导地位，没有形成统一的资本主义经济。4、统治集团的不统一和矛盾冲突，为农村革命提供机遇。5、已经有了新的政党和革命的军队和人民，有了战胜敌人的基本力量。总之，**坚持实事求是，一切从我国的实际情况出发，具体问题具体分析，完全由中国的具体国情所决定的。**

农村包围城市的革命道路，是符合中国国情的正确的革命道路，也是中国革命能够成功的唯一正确的革命道路。

	3. 思政融入 条件概率描述了给定一个事件发生的条件下，另一个事件发生的概率，在求解条件概率时要完全基于已发生的事件来求条件概率。这种思维方式与哲学思想中的“具体问题具体分析”的原则相契合，即强调根据具体情境和条件来分析和解决问题，这与条件概率的思路是一致的。 因此，在讲解条件概率的定义时，给学生强调已发生事件的不同会影响条件概率的计算，从而教导学生在认识事物和解决问题时，要依据不同的情况和条件，具体问题具体分析（图 9-2），结合实际情况，制定切实可行的解决方案，灵活地采取不同的方法和策略，而不能一刀切、一概而论。  图 9-2
分析评价	本案例在讲授条件概率的定义时，将条件概率的思维方式与“具体问题具体分析”方法论完美契合，教导学生具体问题具体分析，要根据具体情境和条件来分析和解决问题，不能一刀切、一概而论，将科学的思维方式传递给学生。
评价者	程国教授，商洛学院数学与计算机应用学院

案例编号	PTMS-010
案例标题	全概率公式——全球首个无人集群智能单元发布
案例来源	原创
内容简介	全概率公式是概率论中的一个非常重要的公式，它实质上是加法公式和乘法公式的综合运用，主要用于计算复杂事件中“由因求果”的概率问题。通过讲解全概率公式的意义，培养学生解决复杂数学问题的科学思维：化整为零，各个击破，把每个局部问题解决后，最终使问题得到解决。
关键词	全概率公式，由因求果，化整为零
编写时间	2023-12-23
编著者	杨燕，副教授，商洛学院数学与计算机应用学院
素材形式	文字，图片
育人主题	给学生传递“化整为零，各个击破”的数学思想
素材长度	1185 字符
案例正文	1. 知识点：全概率公式 在概率论中，经常会遇到需要从已知的简单事件的概率去推算复杂事件的概率。为达到这一目的，可以把复杂事件分解为若干个互不相容的简单事件之和，然后分别计算这些简单事件的概率，最后利用概率的可加性得到最终结果。依据这种想法可以导出概率论中一个常用的重要公式，即全概率公式。为此首先引入样本空间的划分的概念。 定义 1 (样本空间的划分) 设 Ω 为样本空间，$A_1, A_2, \dots, A_n$ 为 Ω 的一组事件，若满足 $1^\circ A_i A_j = \emptyset, \quad i \neq j, i, j = 1, 2, \dots, n;$ $2^\circ \bigcup_{i=1}^n A_i = \Omega;$ 则称 $A_1, A_2, \dots, A_n$ 为样本空间 Ω 的一个划分（图 10-1）。 定理（全概率公式） 设 B 为样本空间 Ω 中的任一事件，

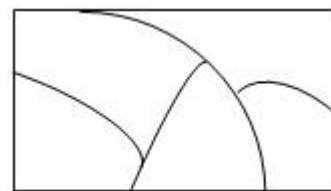


图 10-1

$A_1, A_2, \dots, A_n$ 为 Ω 的一个划分, 且 $P(A_i) > 0 (i = 1, 2, \dots, n)$, 则有

$$\begin{aligned} P(B) &= P(A_1)P(B|A_1) + P(A_2)P(B|A_2) + \dots + P(A_n)P(B|A_n) \\ &= \sum_{i=1}^n P(A_i)P(B|A_i) \end{aligned}$$

称上述公式为全概率公式。

利用概率的可加性和乘法定理证明全概率公式, 让学生熟悉公式的推导。

证

$$\begin{aligned} P(B) &= P(B\Omega) = P(B(A_1 \cup A_2 \cup \dots \cup A_n)) = P(BA_1 \cup BA_2 \cup \dots \cup BA_n) \\ &= P(BA_1) + P(BA_2) + \dots + P(BA_n) \\ &= P(A_1)P(B|A_1) + P(A_2)P(B|A_2) + \dots + P(A_n)P(B|A_n) \end{aligned}$$

结合图 10-2 对全概率公式做讲解。

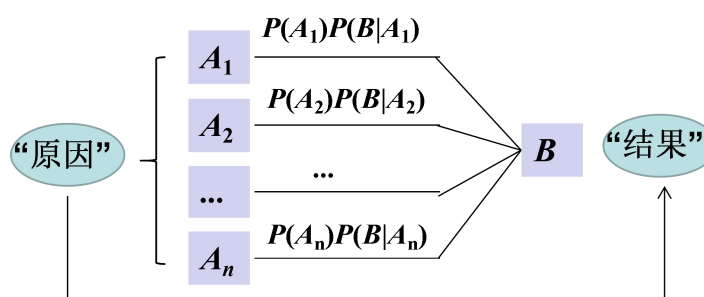


图 10-2

若把公式中的“ B ”视为“果”, 把每个“ A_i ”视作“因”, 则全概率公式反映“由因求果”的概率问题。

2. 案例简介

全球首个无人集群智能单元发布

中国电科在 2019 年 10 月 20 日在乌镇发布了全球首个用于无人集群系统的智能单元 (图 10-3)。该智能单元整合了飞行控制、任务规划、智能决策、动态组网四大功能, 为无人机集群提供全面智能支持, 用 AI 为无人系统装上大脑。

传统的无人机集群系统可能只有一个中央控制系统来管理所有无人机, 但在这个案例中, 中国电科采用了化整为零, 聚零为整的

策略，将复杂的无人机集群系统拆分为多个智能单元，每个单元都具备一定的自主决策和组网能力。这种策略提高了系统的灵活性和可扩展性，使得无人机集群能够更好地适应复杂多变的任务环境。



图 10-3 无人集群智能单元发布

通过这种化整为零的策略，中国电科实现了 200 架固定翼无人机集群飞行的世界纪录，并成功将这一技术应用于自然灾害治理、国土资源管理、生态环境保护、应急事件响应等多个领域。

3. 思政融入

全概率公式体现了将复杂问题分解为简单子问题的科学思维方法。在讲解全概率公式的形式和使用情形时，给学生传递科学的思维方法：化整为零，聚零为整。鼓励学生面对复杂问题时，不要被困难吓倒，能够冷静分析，将问题细化，逐一解决，最终达到将问题解决的目的。

分析评价	本案例通过学习全概率公式，培养学生“化整为零，聚零为整”的科学思维方法，并教会他们如何将一个复杂事件分解为多个简单事件的组合，通过计算每个简单事件的概率，最终达到计算复杂事件的概率。
评价者	程国教授，商洛学院数学与计算机应用学院

案例编号	PTMS-011
案例标题	全概率公式的应用——抽签问题
案例来源	原创
内容简介	抽签是一种常见的选择或决策方式，通过利用全概率公式探究抽签问题，理论联系实际让学生学会了知识的应用，同时也给学生传递出社会公正平等的价值观，引导学生具有热爱祖国，热爱生活精神追求。
关键词	全概率公式，抽签问题，公正平等
编写时间	2024-1-3
编著者	杨燕，副教授，商洛学院数学与计算机应用学院
素材形式	文字，图片
育人主题	公正平等和谐友善的价值观
素材长度	704 字符
案例正文	1. 知识点：全概率公式的应用 定理（全概率公式）设 B 为样本空间 Ω 中的任一事件，$A_1, A_2, \dots, A_n$ 为 Ω 的一个划分，且 $P(A_i) > 0 (i=1, 2, \dots, n)$，则有 $P(B) = P(A_1)P(B A_1) + P(A_2)P(B A_2) + \dots + P(A_n)P(B A_n)$ $= \sum_{i=1}^n P(A_i)P(B A_i)$ 称上述公式为全概率公式。 在概率论中，全概率公式经常用于求复杂事件的概率。 2. 案例简介 抽签问题 学校大学生活动中心要举办一场晚会，每个宿舍只有 2 张入场券（图 11-1），某个宿舍的 6 名同学都想去看晚会，只好用抽签的方式来解决。将 6 张大小相同的纸其中两张写上“入场券”，其余的均为空白，把它们折好放在一起摇匀，6 个人依次抽取一张。请问这样公平吗？后抽的人比先抽的人吃亏吗？



图 11-1

分析 判断公平性和是否吃亏，就是看 6 个人抽到“入场券”纸条的概率是否相同。

解 设 A_i : 第 i 个人抽到“入场券”， $i=1, 2, \dots, 6$;

则 $\bar{A}_i$: 第 i 个人未抽到“入场券”。

则有 $P(A_1) = \frac{1}{3}, P(\bar{A}_1) = \frac{2}{3}$ 。

$$P(A_2) = P(A_1)P(A_2 | A_1) + P(\bar{A}_1)P(A_2 | \bar{A}_1) = \frac{1}{3} \times \frac{1}{5} + \frac{2}{3} \times \frac{2}{5} = \frac{1}{3}$$

求 $P(A_3)$ 前先做一些准备如表 11-2 所示：

表 11-2

B_i	$P(B_i)$	$P(A_3 B_i)$
$B_1 = A_1 A_2$	$\frac{2}{6} \times \frac{1}{5} = \frac{1}{15}$	0
$B_2 = \bar{A}_1 A_2$	$\frac{4}{6} \times \frac{2}{5} = \frac{4}{15}$	$\frac{1}{4}$
$B_3 = A_1 \bar{A}_2$	$\frac{2}{6} \times \frac{4}{5} = \frac{4}{15}$	$\frac{1}{4}$
$B_4 = \bar{A}_1 \bar{A}_2$	$\frac{4}{6} \times \frac{3}{5} = \frac{6}{15}$	$\frac{2}{4}$

	$P(A_3) = \sum_{i=1}^4 P(B_i)P(A_3 B_i)$ $= \frac{1}{15} \times 0 + \frac{4}{15} \times \frac{1}{4} + \frac{4}{15} \times \frac{1}{4} + \frac{6}{15} \times \frac{2}{4} = \frac{1}{3}$ 同理 可求得 $P(A_4) = \frac{1}{3}$, $P(A_5) = \frac{1}{3}$, $P(A_6) = \frac{1}{3}$。 这说明 6 个人抽到“入场券”纸条的概率是相同的。因此这样做是公平的，后抽的人不会比先抽的人吃亏。 抽签方式是一种公正平等的选择方式，因此被应用于日常生活和工作学习的方方面面。 3.思政融入 抽签作为一种常见的选择或决策方式，是基于随机性的选择。在学习全概率公式的应用时，利用全概率公式探究抽签决策方式的公平性，通过探究使学生明白：抽签的确是一种公正、平等的方式。在抽签过程中，每个人都有同等的机会抽到相应的结果，跟抽签的次序无关，因此抽签时应和睦友善，不必争先恐后。既理论联系实际让学生学会了知识的应用，同时也给学生传递出社会公正平等的价值观，引导学生具有热爱祖国，热爱生活精神追求。同时在生活中和工作中，我们应该追求公正和平等，尊重每个人的权利和机会，避免任何形式的歧视和偏见。 图 11-3
分析评价	本案例通过利用全概率公式探究抽签问题的公平性，使学生明白抽签的结果跟次序无关，给学生传递社会公正平等，人们和睦友善的价值观。
评价者	程国教授，商洛学院数学与计算机应用学院

案例编号	PTMS-012
案例标题	贝叶斯公式——贝叶斯和概率统计
案例来源	原创
内容简介	贝叶斯公式是概率论的重要公式之一，讲解贝叶斯公式的形式，介绍英国数学家贝叶斯对概率统计的杰出贡献，培养学生不断探索，持续学习，勇于创新的优秀品质。
关键词	贝叶斯公式，贝叶斯统计，执果溯因
编写时间	2024-2-10
编著者	杨燕，副教授，商洛学院数学与计算机应用学院
素材形式	文字，图片
育人主题	不断探索，持续学习，勇于创新的优秀品质
素材长度	709 字符
案例正文	1. 知识点：贝叶斯公式 已知事件 B 是在诸事件：$A_1, A_2, \dots, A_n$ 发生的条件下发生的，则追究事件 B 的发生是由 A_i 发生引起的概率 $P(A_i B)$。这一问题可视为全概率问题的逆问题，就有下面的逆概率公式(Bayes formula)。 定理 1.3 (贝叶斯 (Bayes) 公式) 设样本空间为 Ω，B 为 Ω 中的事件，$A_1, A_2, \dots, A_n$ 为 Ω 的一个划分，且 $P(B) > 0$，$P(A_i) > 0$，$i=1,2,\dots,n$，则有 $P(A_i B) = \frac{P(B A_i)P(A_i)}{\sum_{j=1}^n P(B A_j)P(A_j)}, \quad i=1,2,\dots,n。 \quad (1)$ 称上式为贝叶斯 (Bayes) 公式，也称为逆概率公式。 证 由条件概率公式有 $P(A_i B) = \frac{P(A_i B)}{P(B)} = \frac{P(A_i)P(B A_i)}{\sum_{j=1}^n P(B A_j)P(A_j)}, \quad i=1,2,\dots,n。$ 2. 案例简介 贝叶斯和概率统计

	托马斯·贝叶斯（Thomas Bayes），1702 年出生于英国伦敦，是一位 18 世纪的英国神学家、数学家、数理统计学家和哲学家。他曾经担任过神甫，并在 1742 年成为英国皇家学会会员。  Thomas Bayes (1702-1761) 英国数学家 图 12-1 贝叶斯在数学方面主要研究概率论，是概率论理论的创始人，他首先将归纳推理法用于概率论基础理论，并创立了贝叶斯统计理论，这是统计学的重要里程碑，对于统计决策函数、统计推断、统计的估算等做出了重要贡献，1763 年发表了这方面的论著，对于现代概率论和数理统计都有很重要的作用。贝叶斯的另一著作《机会的学说概论》发表于 1758 年，贝叶斯所采用的许多术语被沿用至今，贝叶斯思想和方法对概率统计的发展产生了深远的影响。今天，贝叶斯思想和方法在许多领域都获得了广泛的应用， 3. 思政融入 在讲解贝叶斯公式的形式时，介绍英国杰出的数学家和统计学家托马斯·贝叶斯对统计学的巨大贡献。用数学家的优秀品质和卓越贡献激励学生向优秀的数学家学习，学习他的优秀品质和思维方式以及对数学坚持不懈的钻研精神，培养学生不断探索，持续学习，勇于创新的优秀品质。
分析评价	本案例通过介绍英国数学家托马斯·贝叶斯对统计学的巨大贡献，强化学生对贝叶斯公式的认知，同时用数学家的励志故事激励学生不断探索，持续学习，勇于创新，达到了育人目标。
评价者	程国教授，商洛学院数学与计算机应用学院

案例编号	PTMS-013
案例标题	逆概率公式——法拉第的逆向思维和电磁感应定律
案例来源	原创
内容简介	逆概率公式即贝叶斯公式是概率论的重要公式之一，对比全概率公式和贝叶斯公式的区别和联系，分析得出贝叶斯公式所求是全概率公式的反问题，即求解“执果溯因”的概率问题。培养学生利用逆向思维解决问题的能力。
关键词	逆概率公式，贝叶斯公式，逆向思维
编写时间	2024-1-18
编著者	杨燕，副教授，商洛学院数学与计算机应用学院
素材形式	文字，图片
育人主题	培养学生利用逆向思维解决问题的数学素养。
素材长度	1083 字符
案例正文	1. 知识点：逆概率公式（贝叶斯公式） 已知事件 B 是在诸事件：$A_1, A_2, \dots, A_n$ 发生的条件下发生的，则追究事件 B 的发生是由 A_i 发生引起的概率 $P(A_i B)$。这一问题可视为全概率问题的逆问题，就有下面的逆概率公式(Bayes formula)。 定理 1.3 (贝叶斯 (Bayes) 公式) 设样本空间为 Ω，B 为 Ω 中的事件，$A_1, A_2, \dots, A_n$ 为 Ω 的一个划分，且 $P(B) > 0$，$P(A_i) > 0$，$i=1,2,\dots,n$，则有 $P(A_i B) = \frac{P(B A_i)P(A_i)}{\sum_{j=1}^n P(B A_j)P(A_j)}, \quad i=1,2,\dots,n. \quad (1)$ 称上式为贝叶斯 (Bayes) 公式，也称为逆概率公式。 证 由条件概率公式有 $P(A_i B) = \frac{P(A_i B)}{P(B)} = \frac{P(A_i)P(B A_i)}{\sum_{j=1}^n P(B A_j)P(A_j)}, \quad i=1,2,\dots,n.$

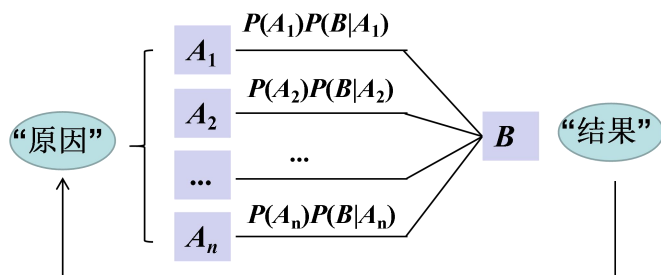


图 13-1

注 逆概率公式（贝叶斯公式）求解“执果溯因”的概率问题（图 13-1）。

2. 案例简介

（1）司马光砸缸

有人落水，常规的思维模式是“救人离水”，而司马光面对紧急险情，运用了逆向思维，果断地用石头把缸砸破，“让水离人”，救了小伙伴性命，见图 13-2。



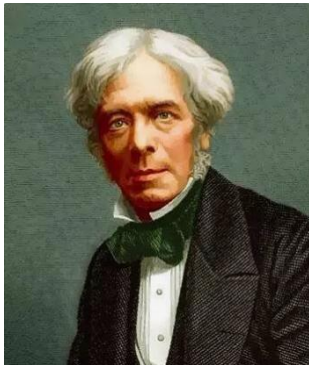
图 13-2

（2）法拉第的逆向思维和电磁感应定律

1820 年丹麦哥本哈根大学物理教授奥斯特，通过多次实验存在电流的磁效应。这一发现传到欧洲大陆后，吸引了许多人参加电磁学的研究。英国物理学家法拉弟（图 13-3）怀着极大的兴趣重复了奥斯特实验。果然，只要导线通上电流，导线附近的磁针立即会发生偏转，他深深地被这种奇异现象所吸引。

当时，德国古典哲学中的辩证思想已传入英国，法拉弟受其影响，认为电和磁之间必然存在联系并且能相互转化。他想既然电能产生磁场，那么磁场也能产生电。

为了使这种设想能够实现，他从 1821 年开始做磁产生电的实验。

	N 次实验都失败了，但他坚信，从反向思考问题的方法是正确的，并继续坚持这一思维方式。 十年后，法拉第设计了一种新的实验，他把一块条形磁铁插入一只缠着导线的空心圆筒里，结果导线两端连接的电流计上的指针发生了微弱的转动!电流产生了!随后，他又设计了各种各样的实验，如两个线圈相对运动，磁作用力的变化同样也能产生电流。  法拉第(1791-1867) 英国科学家 图 13-3 法拉第十年不懈的努力并没有白费，1831 年他提出了著名的电磁感应定律，并根据这一定律发明了世界上第一台发电装置。 法拉第成功地发现电磁感应定律，从电生磁到磁生电的思维就是逆向思维，这是运用逆向思维方法的一次重大胜利。 3. 思政融入 在讲解贝叶斯公式的应用情形时，与全概率公式进行对比，通过图示法强调贝叶斯公式求解全概率公式的反问题，即“执果溯因”的概率问题。让学生理解公式的本质，掌握科学的思维方法，培养学生利用逆向思维解决问题的能力，提高学生的科学素质。鼓励学生在面对复杂问题时，能够运用逆向思维进行多角度、多层次的思考，从而增强他们的问题解决能力。
分析评价	本案例通过对比全概率公式和逆概率公式的区别和联系,强调贝叶斯公式所求是全概率公式的反问题,以此培养学生利用逆向思维解决问题的能力。
评价者	程国教授，商洛学院数学与计算机应用学院

案例编号	PTMS-014
案例标题	贝叶斯公式的应用——贝叶斯公式解读寓言故事“狼来了”
案例来源	原创
内容简介	贝叶斯公式是概率论的重要公式之一，在各个领域有着广泛的应用，通过利用贝叶斯公式解读寓言故事“狼来了”，告诉学生诚信的重要。做人做事都要诚信，教育学生在学习、工作、生活中要树立正确的人生观和价值观，品行端正，积极发扬正能量。
关键词	贝叶斯公式，寓言故事“狼来了”，诚信
编写时间	2024-2-28
编著者	杨燕，副教授，商洛学院数学与计算机应用学院
素材形式	文字，图片
育人主题	诚信做人，诚信做事的优秀品质
素材长度	1100 字符
案例正文	1. 知识点：逆概率公式（贝叶斯公式） 已知事件 B 是在诸事件：$A_1, A_2, \dots, A_n$ 发生的条件下发生的，则追究事件 B 的发生是由 A_i 发生引起的概率 $P(A_i B)$。这一问题可视为全概率问题的逆问题，就有下面的逆概率公式(Bayes formula)。 定理 1.3 (贝叶斯 (Bayes) 公式) 设样本空间为 Ω，B 为 Ω 中的事件，$A_1, A_2, \dots, A_n$ 为 Ω 的一个划分，且 $P(B) > 0$，$P(A_i) > 0$，$i=1,2,\dots,n$，则有 $P(A_i B) = \frac{P(B A_i)P(A_i)}{\sum_{j=1}^n P(B A_j)P(A_j)}, \quad i=1,2,\dots,n. \quad (1)$ 称上式为贝叶斯 (Bayes) 公式，也称为逆概率公式。 注意：逆概率公式（贝叶斯公式）求解“执果溯因”的概率问题。 2. 案例简介 学以致用——贝叶斯公式解读寓言故事“狼来了”（图 14-1） 量化村民对小孩的可信度下降的过程。



图 14-1

解 设事件 A : “小孩说谎”, B : “小孩可信”。假设过去村民对小孩信任程度为 $P(B) = 0.8, P(\bar{B}) = 0.2$, 设“可信的孩子说谎”的可能性大小 $P(A|B) = 0.1$, “不可信的孩子说谎”的可能性大小 $P(A|\bar{B}) = 0.5$ 。

利用贝叶斯公式求出小孩第一次说谎和第二次说谎后村民对他的信任度的值。当小孩第一次说谎, 即事件 A 发生的条件下, 村民对小孩的可信度改变为

$$P(B|A) = \frac{P(B)P(A|B)}{P(B)P(A|B) + P(\bar{B})P(A|\bar{B})}$$

$$= \frac{0.8 \times 0.1}{0.8 \times 0.1 + 0.2 \times 0.5} = 0.444$$

第一次说谎后, 村民对小孩的可信度由原来的 0.8 下降为 0.444. 此时村民对小孩的信任程度为 $P(B) = 0.444, P(\bar{B}) = 0.556$.

小孩第二次说谎, 再利用 Bayes 公式, 村民对小孩的可信度改变为

$$P(B|A) = \frac{0.444 \times 0.1}{0.444 \times 0.1 + 0.556 \times 0.5} = 0.138$$

综上, 两次说谎后, 村民对小孩的可信度降得很低, 为 0.138。



图 14-2

学生直观地看到, 两次说谎后村民对小孩信任度的变化过程(图 14-2), 由原来的 0.8 降为 0.138, 降得很低了。这就是当小孩第三次

	喊“狼来了”的时候，为什么没有村民上山救他的原因。他失去了村 他对他的信任，最后只能自食其果。 3. 思政融入 作为贝叶斯公式的应用，利用贝叶斯公式定量刻画了村民对小孩可信度的下降过程，由此告诫学生诚信的重要。做人做事都要诚信，因为人们会根据与你交往中发生的事件去修正对你的印象（先验概率），用后验概率替代先验概率，而且这种修正会一次又一次进行，其量化工具就是贝叶斯公式。教育学生在学、习、工、作、生、活中要树立正确的人生观和价值观，践行社会主义核心价值观（图 14-3），品行端正（图 14-4），积极发扬正能量（图 14-5）。 图 14-3 图 14-4 校训 图 14-5 传递正能量 校训：博闻强志 正道直行，语出《史记》，意为博学广鉴，融会贯通；秉性刚直，行为端正。
分析评价	本案例用贝叶斯公式对寓言故事“狼来了”进行概率解读，引出诚信的重要性，引导学生诚信做人诚信做事，积极发扬正能量，做新时代社会主义核心价值观的践行者，为国家富强，民族复兴贡献自己的力量，思政切入自然，育人效果良好。
评价者	程国教授，商洛学院数学与计算机应用学院

案例编号	PTMS-015
案例标题	事件独立性的概念——炮击导弹问题
案例来源	原创
内容简介	事件的独立性是概率论的重要概念之一，在学习事件独立性的概念时以电影《红海行动》中我国临沂号导弹护卫舰上近防炮发射炮弹拦截来袭火箭弹的视频引出炮击导弹问题，从而引入本节知识。通过震撼的视频和情境式的现实问题激发学生的学习兴趣，引导学生自主探究分析解决问题，让学生为国家军事实力的提升倍感骄傲，增强学生的爱国意识和民族自豪感。
关键词	事件的独立性，炮击导弹问题，近防炮
编写时间	2024-3-9
编著者	杨燕，副教授，商洛学院数学与计算机应用学院
素材形式	文字，视频，图片
育人主题	爱国意识和民族自豪感
素材长度	993 字符
案例正文	1. 知识点：事件的独立性 (1) 两个事件的独立性 定义 1 设 A, B 是两个事件，如果满足 $P(AB) = P(A)P(B),$ 则称事件 A, B 相互独立，简称 A, B 独立。 性质：若事件 A, B 相互独立，则其余三对事件 A 与 $\bar{B}$，$\bar{A}$ 与 B，$\bar{A}$ 与 $\bar{B}$ 也相互独立。 (2) 三个事件的独立性 定义 2 若 3 个事件 A_1, A_2, A_3 满足 ① $P(A_1A_2) = P(A_1)P(A_2)$; ② $P(A_2A_3) = P(A_2)P(A_3)$; ③ $P(A_1A_3) = P(A_1)P(A_3)$;

$$\textcircled{4} P(A_1 A_2 A_3) = P(A_1)P(A_2)P(A_3);$$

则称事件 A_1, A_2, A_3 相互独立。

注意 相互独立一定两两独立，两两独立未必相互独立。

(3) n 个事件的独立性

定义 3 设 $A_1, A_2, \dots, A_n$ 是 n 个事件，若对任意的 $k (2 \leq k \leq n)$ 和任意的 $1 \leq i_1 < \dots < i_k \leq n$,

$$P(A_{i_1} A_{i_2} \cdots A_{i_k}) = P(A_{i_1})P(A_{i_2}) \cdots P(A_{i_k})$$

则称事件 $A_1, A_2, \dots, A_n$ 相互独立。

2. 案例简介

电影《红海行动》(图 15-1)中我国临沂号导弹护卫舰用近防炮拦截来袭火箭弹的视频片段，引出炮击导弹问题。以此引出本节主题——事件的独立性。



图 15-1 电影《红海行动》

引例：炮击导弹问题

“近防炮”是一种装备在舰艇上的近空防御系统，能在短时间内发射大量炮弹对敌方导弹目标进行攻击。假设每发炮弹的命中率为 0.004，且每发炮弹能否命中目标互不影响。若系统发射 100 发炮弹，求至少命中一发的概率。

利用事件的独立性求解炮击导弹问题，同时介绍我国近防炮的发展历程。我国近防炮的发展从上世纪八十年代起步，经过技术引进和自主研发，形成了 730 型近防炮（图 15-2）和 1130 近防炮两代产品（图 15-3）。其中，1130 近防炮以其高射速、大弹量和智能化特点，

成为当今世界上最先进的近防炮之一,为中国海军舰艇提供了强大的近程防御能力。



图 15-2

第一代近防炮：730 型近防炮
7 管 30 毫米,最大射速 4200 发/分,
性能:相比俄国 AK630 更加智能,
比美国密集阵弹药口径更大,毁
伤效果也更好,中国海军舰艇的
标配。

图 15-3

第二代近防炮：1130 近防炮
11 管 30 毫米加特林速射炮,最
大火力 11000 发/分(166 发/秒),
能够击落以四倍音速飞行的高
超音速导弹,具备拦截反舰导
弹、巡航导弹、飞机和其他武
器的能力。

3. 思政融入

在课堂引入环节通过视频中的炮击导弹问题引入新课内容,新课讲授环节用所学内容求解炮击导弹问题,让学生看到知识学以致用用的同时,给学生介绍我国近防炮的发展历程,特别介绍 1130 近防炮,这款由我国自主研发的当今世界上最先进的近防炮,具有高射速、大弹量和智能化等特点,最大火力 11000 发/分(166 发/秒),被称为“万发炮”,让学生为国家军事实力的提升倍感骄傲,增强学生的爱国意识和民族自豪感。

分析评价

本案例在求解炮击导弹问题时,给学生普及相关军事知识,介绍我国近防炮的发展历程,引发学生的情感共鸣,树立作为中国人的骄傲感和自豪感,增强了学生的爱国意识和民族自豪感,思政切入合理自然,育人效果良好。

评价者

程国教授, 商洛学院数学与计算机应用学院

案例编号	PTMS-016
案例标题	事件独立性的应用——“三个臭皮匠，顶个诸葛亮”的典故
案例来源	原创
内容简介	作为事件的独立性的应用，用独立事件的概率计算公式求解破译密码问题，深刻诠释“三个臭皮匠，顶个诸葛亮”这句中国古老谚语包含的哲理，让学生感受团队合作和集体智慧的重要性。
关键词	事件的独立性，密码破译问题，团队精神
编写时间	2024-3-5
编著者	杨燕，副教授，商洛学院数学与计算机应用学院
素材形式	文字，图片
育人主题	中国古老谚语蕴含的文化自信。
素材长度	939 字符
案例正文	1. 知识点：独立性的应用——简化概率计算 假设 n 个事件相互独立，则乘法公式简化为： $P(A_1 A_2 \cdots A_n) = P(A_1)P(A_2) \cdots P(A_n);$ 加法公式简化为： $ \begin{aligned} P\left(\bigcup_{i=1}^n A_i\right) &= 1 - P\left(\bigcap_{i=1}^n \overline{A_i}\right) \\ &= 1 - P(\overline{A_1} \overline{A_2} \cdots \overline{A_n}) \\ &= 1 - P(\overline{A_1})P(\overline{A_2}) \cdots P(\overline{A_n}) \\ &= 1 - [1 - P(A_1)][1 - P(A_2)] \cdots [1 - P(A_n)] \end{aligned} $ 2. 案例简介 “三个臭皮匠，顶个诸葛亮”的典故 在古代，有三个皮匠，他们虽然平时不太起眼，但各自都有一些手艺和技巧。有一天，他们遇到了一个难题：一座桥梁需要修复，但是缺乏合适的设计方案。这座桥梁是通往重要城镇的关键通道，如果不能及时修复，将会给当地的经济和民生带来严重影响。

这三个皮匠听说后，决定发挥自己的智慧和技能来解决这个问题。他们分别提出了自己的方案，但每个方案都有一些不足之处。于是，他们开始相互讨论、交流和修改，不断完善各自的方案。在这个过程中，他们充分发挥了集体智慧的优势，相互补充、相互启发，最终形成了一个完美的修复方案。

这个方案不仅解决了桥梁的修复问题，还提高了桥梁的承载能力和使用寿命。当地人们对这三个皮匠的智慧和能力赞叹不已，纷纷称赞他们“三个臭皮匠，顶个诸葛亮”（图 16-1）。



图 16-1

独立性的应用——密码破译问题

甲、乙、丙 3 人独立破译一份密码，设他们的成功率分别为 0.4、0.3 和 0.2，求密码被破译的概率。

解：记 A_1 ：甲破译成功； A_2 ：乙破译成功； A_3 ：丙破译成功；

B ：密码被破译。则有

$$\begin{aligned}
 P(B) &= P(A_1 \cup A_2 \cup A_3) \\
 &= 1 - P(\overline{A_1} \cup \overline{A_2} \cup \overline{A_3}) \\
 &= 1 - P(\overline{A_1} \overline{A_2} \overline{A_3}) \\
 &= 1 - P(\overline{A_1})P(\overline{A_2})P(\overline{A_3}) \\
 &= 1 - 0.6 \times 0.7 \times 0.8 = 0.664
 \end{aligned}$$

3. 思政融入

事件独立性的重要应用在于简化概率计算，即获得形式更简单的乘法公式和加法公式形式，对求解概率问题提供了便利。在讲授

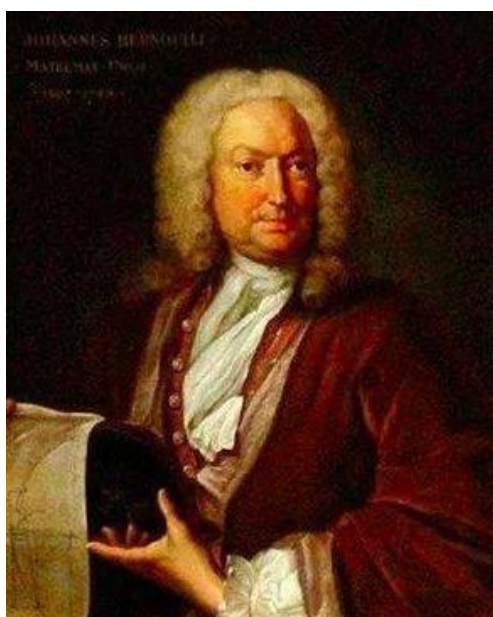
	独立性的应用时，通过密码破译问题深刻诠释“三个臭皮匠，顶个诸葛亮”这句中国古老谚语包含的哲理，让学生感受团队合作和集体智慧的强大。告诉学生即使是普通人，在集体合作的情况下也能发挥出超乎寻常的智慧和能力。每个人的力量是有限的，集体智慧的力量是无穷的。（图 16-2）还引导学生在面临困难和挑战时，应该学会倾听他人的意见和建议，积极发挥自己的智慧和技能，与他人合作共同解决问题。这样，我们不仅能够取得成功，还能够促进彼此之间的友谊和信任。  图 16-2
分析评价	本案例在用独立事件的概率计算公式求解密码破译问题时，既展示了所学知识的学以致用，也诠释“三个臭皮匠，顶个诸葛亮”这句中国古老谚语包含的哲理，让学生在不经意间认识到团队合作和集体智慧的重要性，思政切入巧妙贴切，有很好的育人效果。
评价者	程国教授，商洛学院数学与计算机应用学院

案例编号	PTMS-017
案例标题	伯努利概型——雅各布·伯努利及其家族
案例来源	原创
内容简介	伯努利概型是一种常见的概率模型，在讲解伯努利定理时，给学生介绍数学家雅各布·伯努利及其家族的故事，让学生了解产生了8位科学家的数学界第一大家族伯努利家族的传奇故事，鼓励学生努力学习，丰富知识面，不断探索，书写属于自己的美丽人生。
关键词	伯努利概型，伯努利定理，伯努利家族
编写时间	2023-4-8
编著者	杨燕，副教授，商洛学院数学与计算机应用学院
素材形式	文字，图片
育人主题	坚定追求、终身学习的优秀品质。
素材长度	1305 字符
案例正文	1. 知识点：伯努利概型 伯努利概型是继古典概型和几何概型后又一种常见且重要的概率模型。 (1) 伯努利试验 只有两个可能结果的试验称为伯努利试验。 (2) n 重伯努利试验 在相同条件下，将伯努利试验独立重复地进行 n 次，这一系列试验称为 n 重伯努利试验，或称 n 重伯努利概型。 (3) 伯努利定理（伯努利概率计算公式） 定理 设在一次试验中，事件 A 出现的概率为 $P(A)=p$ ($0<p<1$)，则在 n 重伯努利试验中，事件 A 恰好出现 k 次的概率为 $P_n(k) = C_n^k p^k (1-p)^{n-k} \quad (k=0,1,2,\dots,n)$ 其中，$q=1-p=1-P(A)$ 2. 案例简介

雅各布·伯努利及其家族

瑞士的伯努利家族三代人中产生了 8 位科学家，出类拔萃的至少有 3 位；而且在他们一代又一代的众多子孙中，至少有一半相继成为杰出人物，伯努利家族的后裔有不少于 120 人被人们系统地追溯过，他们在数学、科学、技术、工程乃至法律、管理、文学、艺术等方面享有名望，有的甚至声名显赫。最不可思议的是，这个家族中有两代人，他们中的大多数数学家并非有意选择数学为职业，然而却忘情地沉溺于数学之中，有人调侃他们就像酒鬼碰到了烈酒。

老尼古拉·伯努利(Nicolaus Bernoulli, 1623-1708)生于巴塞尔，受过良好教育，曾在当地政府和司法部门任高级职务，他有 3 个有成就的儿子。其中长子雅各布(Jacob, 1654-1705)和第三个儿子约翰(Johann, 1667-1748)成为著名的数学家，第二个儿子小尼古拉(Nicolaus I, 1662-1716)在成为彼得堡科学院数学界的一员之前，是伯尔尼的第一个法律教授。



雅各布·伯努利（1654-1705）

图 17-1

1654 年 12 月 27 日，雅各布·伯努利(图 17-1)生于巴塞尔，后来毕业于巴塞尔大学，1671 年他 17 岁时获艺术硕士学位，这里的艺术指“自由艺术”，包括算术、几何学、天文学、数理音乐和文法、修

	辞、雄辩术共 7 大门类，遵照父亲的愿望，他于 1676 年 22 岁时又取得了神学硕士学位。然而，他也违背父亲的意愿，自学了数学和天文学，雅各布·伯努利在 1678 年和 1681 年两次遍游欧洲学习旅行，使他接触了许多数学家和科学家，丰富了他的知识，拓宽了他的兴趣。1682 年他重返巴塞尔，开始教授力学。雅各布·伯努利对数学最重大的贡献是在概率论研究方面，他从 1685 年起发表关于赌博游戏中输赢次数问题的论文，后来写成巨著《猜度术》，这本书在他死后 8 年，即 1713 年才得以出版。1687 年，雅各布成为巴塞尔大学的数学教授。至逝世，他一直执掌着巴塞尔大学的数学教席。在数理统计发展形成的古典时期(19 世纪以前)，伯努利就系统论证了大数定律。除进行数学研究工作外，他还广交学友，所写书信卷帙浩繁，是当时欧洲科学界一位颇有影响的人物。 3. 思政融入 在讲授伯努利概型时，给学生介绍伯努利家族和数学家雅各比·伯努利的故事，让学生了解这个数学界第一家族的故事和数学家深厚的学术造诣外，给学生传递雅各布·伯努利不顾家庭压力，自学数学和天文学的坚定学术追求和在研究中注重实证和逻辑推理的严谨的科学态度。鼓励学生以他为榜样，坚定自己的追求和热情，保持自学和终生学习的精神，严谨的科学态度，以及不断探索和创新的精神，这有助于我们在学习和工作中取得更好的成绩和更大的成就。
分析评价	本案例在讲解伯努利定理时，介绍数学家雅各布·伯努利及其家族的传奇故事，用数学家伯努利的励志故事鼓励学生向他学习，坚定追求、努力学习、不断探索、书写属于自己的美丽人生。
评价者	程国教授，商洛学院数学与计算机应用学院

案例编号	PTMS-018
案例标题	小概率事件原理——“水滴石穿”
案例来源	原创
内容简介	小概率事件原理是概率论与数理统计中一个非常重要的概念，它涉及到对概率极低的事件的认识和评估。在讲授该内容时通过考试蒙题和滴水穿石的例子，给学生强化“人生在勤，不索何获”的观念意识，传递“滴水石穿，愚公移山”包含的深刻道理。
关键词	小概率事件原理，不索何获，滴水石穿
编写时间	2023-11-8
编著者	杨燕，副教授，商洛学院数学与计算机应用学院
素材形式	文字，图片
育人主题	中国成语“滴水石穿，愚公移山”包含的深刻道理和文化自信
素材长度	1185 字符
案例正文	1. 知识点：小概率事件原理 （1）小概率事件 定义 如果一个事件发生的概率很小，就称它是小概率事件。 注 在概率论中，通常认为概率很接近于 0（例如，等于或小于 0.05 或 0.01）的事件为小概率事件。 （2）小概率原理 在实际生活中，我们常常忽略小概率事件发生的可能性，并认为小概率事件在一次试验中不会发生，通常称为小概率原理。 性质： ①单次试验几乎不可能发生。由于小概率事件的概率极低，因此在一次单独的试验中，它们几乎是不可能发生的。这也是小概率事件得名的原因。 ②多次试验必然发生。虽然小概率事件在单次试验中几乎不可能发生，但在大量重复试验中，由于试验次数的增加，这些事件发生的可能性会逐渐增大，最终成为必然事件。 2. 案例简介

“投机取巧”考试

一张概率论与数理统计试卷，有 10 道选择题，每题有 4 个选择答案，且其中只有一个是正确答案。某同学投机取巧，随意填空，试问他及格即至少填对 6 道的概率是多大？

解 设 B : “他至少填对 6 道”，每答一道题有两个可能的结果： A 表示“答对”， $\bar{A}$ 表示“答错”，由题意 $P(A) = \frac{1}{4}$ ，故作 10 道题就是 10 重伯努利试验， $n=10$ ，所求概率为

$$\begin{aligned} P(B) &= \sum_{k=6}^{10} P_{10}(k) = \sum_{k=6}^{10} C_{10}^k \left(\frac{1}{4}\right)^k \left(1 - \frac{1}{4}\right)^{10-k} \\ &= C_{10}^6 \left(\frac{1}{4}\right)^6 \left(1 - \frac{1}{4}\right)^{10-6} + C_{10}^7 \left(\frac{1}{4}\right)^7 \left(1 - \frac{1}{4}\right)^{10-7} + \dots + C_{10}^{10} \left(\frac{1}{4}\right)^{10} \\ &\approx 0.01973 \end{aligned}$$

本例说明，该同学随意猜测，能在 10 道题中猜对 6 道以上的概率是很小的，在实际中几乎是不会发生的。

“水滴石穿”

设 A 表示“水滴落下击穿石头”，且 $P(A) = 0.00002$ 。设 B 表示水滴落下 n 次，石头被击穿，那么 B 的概率是多少呢？

$$P(B) = 1 - P(\bar{B}) = 1 - (1 - 0.00002)^n,$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} P(B) = 1$$



图 18-1

本例说明，水滴落下一次击穿石头的概率非常小，它是个小概率事件，在一次实验中一般不会发生。但是，只要水滴持之以恒，

	坚持不懈地落下，水滴可以穿石(图 18-1)。 3. 思政融入 在讲解小概率事件原理时，通过与学生密切相关的考试问题的求解，给学生强化“人生在勤，不索何获”的观念意识，概率很小的事件在一次试验中实际上几乎是不会发生的。所以在考试中想靠随意猜测通过考试，也几乎是不会发生的。告诉学生没有付出就没有收获，学习和成功并没有什么捷径，要靠脚踏实地努力付出。 同时，还通过滴水穿石的例子，给学生传递“滴水石穿，愚公移山，铁杵成针”这些俗语中包含的概率原理：坚持不懈，小概率事件一定会发生。告诫学生，牢记习近平总书记对青年的殷切希望(图 18-2)，在平常的学习和工作中，一定要有恒心，有毅力，坚韧不拔，持之以恒，不断地进取，拿出水滴石穿的精神，定能获得成功，实现自己的目标。 青年要把艰苦环境作为磨炼自己的机遇，把小事当作大事干，一步一个脚印往前走。滴水可以穿石。只要坚韧不拔、百折不挠，成功就一定在前方等你。 ——习近平总书记在北大师生座谈会上的讲话 (2014年5月4日)
分析评价	本案例在讲解小概率事件原理时，把“没有付出就没有收获”的人生哲理和“坚韧不拔，持之以恒”的水滴穿石精神灌输进学生的心田，对培养他们良好的学习态度和坚持不懈的奋斗精神大有益处，思政育人作用突出。
评价者	程国教授 商洛学院数学与计算机应用学院

案例编号	PTMS-019
案例标题	随机变量——数学美
案例来源	原创
内容简介	在讲解随机变量这一节的内容时，通过严加安院士的《悟道诗》引入随机的概念，暗示了概率论与数理统计学的重要性，让学生体会到数学美。
关键词	随机变量；数学美
编写时间	2024-3-11
编著者	马春洁，助教，商洛学院数学与计算机应用学院
素材形式	文字、图片
育人主题	在诗词的优美韵律和深邃意境中，感受数学之美。
素材长度	1006 字符
案例正文	1. 知识点：随机变量 定义 1 设 E 是随机变量，样本空间为 S，如果对随机试验的每一次结果 ω，都有一个实数 $X(\omega)$ 与之对应，那么把这个定义在 S 上的单值实值函数 $X = X(\omega)$ 称为随机变量。 随机变量一般用大写字母 $X, Y, Z, \dots$ 表示。 2. 案例简介 数学美 诗词与数学，看似两个截然不同的领域，实则蕴含着深刻的内在联系。在诗词的优美韵律和深邃意境中，我们可以感受到数学的严谨与美丽。首先，诗词的韵律和节奏中蕴含着数学的规律。诗词讲究平仄、对仗和押韵，这些都是数学中对称和周期性的体现；其次，诗词的意境和描述中也融入了数学的元素；此外，诗词中的哲理和思考也与数学密切相关。 数学是一门探索宇宙规律和自然奥秘的学科，而诗词则是表达人类情感和思考的艺术形式。二者在探索世界和表达思想方面有着异曲同工之妙。例如，“横看成岭侧成峰，远近高低各不同”这句诗(图 19-1)，既表达了诗人对自然景物的独特感受，也揭示了数学

中多角度观察和思考问题的重要性。通过培养这种思维方式，我们可以更深入地理解数学的本质，更好地欣赏数学的美。



图 19-1

三、思政融入

以诗开课，介绍严加安院士的《悟道诗》：“随机非随意，概率破玄机。无序隐有序，统计解迷离(图 19-2)。”这首诗巧妙地将我们这门课程中要研究的随机、概率、统计这些词语嵌入其中。也说明了，随机性似乎毫无规则可循，但事实上它也蕴含有概率规律，暗示了本课程的重要性。这首诗引人入胜，激发了学生的好奇心，概率如何破玄机，统计怎样解谜题。这首诗既让学生体会到了中国诗词之美，也体会到了这门课程的美。



图 19-2 《悟道诗》

分析评价	本案例在学习随机变量时，通过严加安院士的《悟道诗》引入随机的概念，让学生更容易理解相关概念，且能够体会到数学美。
评价者	程国教授，商洛学院数学与计算机应用学院

案例编号	PTMS—020
案例标题	二项分布的概念——新药治疗效果问题
案例来源	原创
内容简介	借用一道新药治疗效果分析的题目引入二项分布内容的学习和理解，让学生认识药品研发的严肃性和生产过程中的严格规范性，以及感受健康的可贵，增强安全意识，珍爱生命，要让生命更有意义，要对自己的生活负责。
关键词	二项分布，药品治疗效果
编写时间	2024-2-25
编著者	王瑞，助教，商洛学院数学与计算机应用学院
素材形式	文字、图片、网页资料
育人主题	领悟生命的可贵与药品研发的严肃性，珍爱生命，关注健康
素材长度	1112 字符
案例正文	1. 知识点：二项分布的概念 二项分布是概率论中重要的分布之一，在概率问题的求解中具有广泛的应用。 定义 若随机变量 X 表示 n 重伯努利试验中事件 A 出现的次数， 则有 $P(X = k) = C_n^k p^k (1 - p)^{n-k}, k = 0, 1, 2, \dots, n,$ 称随机变量 X 服从二项分布，记为 $X \sim B(n, p)$，其中 n 和 $p(0 < p < 1)$ 是二项分布的参数，上式即为二项分布的分布律。 2. 案例简介 新药药效评价临床试验规范是保证试验结果的准确性、可靠性和可被接受性的重要保障。它对于新药的开发和上市申请具有重重要的指导意义。只有严格按照规范进行临床试验，才能保证新药的有效性和安全性，为临床医生和患者提供合适的治疗选择。因此，对于从事新药研发和临床试验的科研人员和医学从业者来说，了解和遵守这些规范是至关重要的。只有这样，才能更好地推动新药的研发和创新，为患者带来更多的福祉。

研发的新药治疗效果问题

例 某科研机构宣称,其研制的新药对某种疾病的治愈率达 90%,现对 10 位临床患者试验此药,结果只有 4 人痊愈,那么这是否反映出新药的治疗效果存在问题?

解 假设治愈率 $P = 0.9$, “临床患者试验此药后是否治愈”可认为是独立的,因此 “10 位临床患者试验此药是否治愈”是一个 $n = 10, P = 0.9$ 的伯努利试验。

设痊愈人数为随机变量 X , 则 $X \sim B(10, 0.9)$, 因而有

$$P(X = 4) = C_{10}^4 0.9^4 0.1^6 \approx 0.0001$$

计算结果表明,在治愈率 $P = 0.9$ 的假定下,平均每 10000 次药物试验,有 1 次出现 “10 位患者 4 人治愈”的情况,而现在一次试验就出现了这种罕见现象,根据小概率原理,有理由认为此科研机构对其新药的治愈率期望过高。

3.思政融入

每个人都或多或少不可避免的有过生病吃药经历。一枚小小药片的诞生要经历 6 个阶段:致病基因确证-候选药物发现-临床前研究-临床试验注册申请-临床试验-新药申请直至获批上市销售。



图 20-1 药片诞生的 6 个阶段

在药物发现阶段,研发人员从临床需求出发,找到与疾病相关的药物靶点和生物标记物,然后从植物、微生物或者海洋生物中寻找对

	这个靶标有调控作用的先导化合物。当然也可以通过计算机模拟，设计并合成全新化合物，用这个化合物也能去瞄准靶标。接着经历原料药合成工艺研发、制剂研发、动物实验、一到三期临床试验，最后上报国家药监局批准、获批后才能上市销售。每个阶段又包含很多严苛且细致的环节，经历过九九八十一难，才算是真正修成正果，来到市场上和大家见面。 通过本例让学生简短了解到“药品的一生”，旨在让学生认识药品研发的严肃性和生产过程中的严格规范性，以及感受健康的可贵，增强安全意识，珍爱生命，关注健康（图 20-2），要让生命更有意义，要对自己的生活负责。  图 20-2 珍爱生命，关注健康
分析评价	从一道新药治疗效果的例题引入对离散型随机变量常用分布即二项分布的学习，通过对题目的解答掌握二项分布的概念，同时透过引例，可以引导学生领悟生命的可贵与药品研发的严肃性，感知生活，树立正确人生观、世界观、价值观。
评价者	程国教授，商洛学院数学与计算机应用学院

案例编号	PTMS—021
案例标题	二项分布的概率计算——遗传学问题
案例来源	原创
内容简介	通过对遗传学中的豚鼠 F2 代出现毛色概率的计算，深入认识和掌握二项分布的概率计算，展示了理论知识在实践中的应用价值，给学生强调理论联系实际的重要性，培养学生学以致用意识。
关键词	二项分布，概率计算，理论联系实际
编写时间	2024-3-3
编著者	王瑞，助教，商洛学院数学与计算机应用学院
素材形式	文字、图片
育人主题	强调理论联系实际的重要性，培养学生学以致用意识
素材长度	503 字符
案例正文	1. 知识点：二项分布 若随机变量 X 表示 n 重伯努利试验中事件 A 出现的次数，则有 $P(X = k) = C_n^k p^k (1 - p)^{n-k}, k = 0, 1, 2, \dots, n,$ 称随机变量 X 服从二项分布，记为 $X \sim B(n, p)$，其中 n 和 $p(0 < p < 1)$ 是二项分布的参数。上式即二项分布的分布律。 2. 案例简介 遗传学中的一些概率计算问题 豚鼠的毛色由一对等位基因控制，黑色为显性（基因型用 B 表示），白色为隐性（基因型用 b 表示），如果杂合型黑色豚鼠（基因型为 Bb）相互交配，则 （1）4 个后代表现型依次为黑、黑、黑和白的概率是多少？ （2）4 个后代是 3 黑和 1 白（不按顺序）的概率是多少？ （3）n 个后代，出现 k 只黑色豚鼠的概率是多少？ 解 （1）杂合型黑色豚鼠（Bb）相互交配，其后代的基因型可能为 Bb, BB, bB, bb，各占 $\frac{1}{4}$ 的概率，因此黑后代的概率为 $p = \frac{3}{4}$，

	白色后代的概率为 $q = \frac{1}{4}$，则 4 个后代依次为黑、黑、黑和白的概率为 $p \times p \times p \times q = \left(\frac{3}{4}\right)^3 \left(\frac{1}{4}\right) = \frac{27}{256}$ (2) 设 4 个后代中黑色豚鼠的个数为 $X, X \sim B(4, \frac{3}{4})$，则后代有 3 黑 1 白的概率为 $P(X = 3) = C_4^3 \left(\frac{3}{4}\right)^3 \left(\frac{1}{4}\right) = \frac{81}{256}$ (3) 设 n 个后代中出现黑色豚鼠的个数为 $X, X \sim B(n, \frac{3}{4})$，则所求概率为 $P(X = k) = C_n^k \left(\frac{3}{4}\right)^k \left(\frac{1}{4}\right)^{n-k}$ 3.思政融入 遗传学中某种基因型或表现型出现概率的计算是生物中的一个重难点，可以使用二项分布进行建模和预测，通过遗传概率计算，展示了理论知识在实践中的应用价值，给学生强调理论学习与实践应用，即理论联系实际的重要性，培养学生学以致用意识（图 21-1）。 图 21-1 学以致用
分析评价	遗传学中某种基因型或表现型出现概率的计算是生物中的一个重难点，可以使用二项分布进行建模和预测，遗传试验的有趣性可以激发学生浓厚的学习兴趣，调动学生对学习内容的积极性。
评价者	程国教授，商洛学院数学与计算机应用学院

案例编号	PTMS—022
案例标题	二项分布的应用——赌注问题
案例来源	原创
内容简介	作为二项分布的应用，分析赌注问题，让学生了解赌注问题的源起和演进史，从数学史中学习数学知识，感悟数学家们的智慧与创新之处，培养学生的数学思维和创新意识。
关键词	二项分布；赌注问题；数学思维；创新意识
编写时间	2024-3-7
编著者	王瑞，助教，商洛学院数学与计算机应用学院
素材形式	文字、图片
育人主题	培养学生的数学思维和创新意识
素材长度	957 字符
案例正文	1、知识点：二项分布 定义 若随机变量 X 表示 n 重伯努利试验中事件 A 出现的次数，则有 $P(X = k) = C_n^k p^k (1-p)^{n-k}, k = 0, 1, 2, \dots, n$, 称随机变量 X 服从二项分布，记为 $X \sim B(n, p)$， 其中 n 和 $p(0 < p < 1)$ 是二项分布的参数。上式即二项分布的分布律。 2. 案例简介 赌注问题 案例 甲、乙两人各下赌注 d 元，商定先胜三局者赢得全部赌金。假定在一局中两人获胜的机会相等，且每局中胜负相互独立。如果当甲胜一局而乙尚未获胜时赌博被迫中止，赌注应当怎么分？ 解：用 X 表示独立重复贝努利试验中事件 A 第 r ($r \geq 1$，为参数) 次发生时已进行的试验次数，则 $P(X = k) = C_{k-1}^{r-1} p^r (1-p)^{k-r}$ 则称随机变量 X 服从参数为 r, p 的负二项分布，记为 $X \sim B(r, p)$。 甲先胜三局的概率可以用负二项分布（也称为帕斯卡分布）来计算。

设 X 为甲第 2 次获胜时已进行的试验次数, 则 $X \sim B(2, 0.5)$, 这样可得甲将赢得全部赌金的概率为

$$P(\text{甲先胜三局}) = P(2 \leq x \leq 4)$$

$$\begin{aligned} &= \sum_{k=2}^4 C_{k-1}^1 0.5^2 0.5^{k-2} \\ &= C_1^1 0.5^2 0.5^0 + C_2^1 0.5^2 0.5^1 + C_3^1 0.5^2 0.5^2 \\ &= \frac{11}{16} \end{aligned}$$

从而乙将赢得全部赌金的概率为 $5/16$ 。因此, 总额为 $2d$ 的赌注应按 $11:5$ 的比例分给甲、乙两人。

另外, 在概率论的历史上还有一个问题与负二项分布有关, 这就是巴拿赫火柴问题: 某人口袋里有两盒火柴, 开始时每盒各装 n 根, 每次他从口袋中任取一盒并使用其中的一根。求此人掏出一盒发现已空, 而另一盒剩余 m 根的概率。

解 记随机事件 $E = \{\text{掏出甲盒已空而乙盒尚余 } m \text{ 根火柴}\}$ 。由对称性可知所求概率为 $2P(E)$ 。以取出甲盒为“成功”, 这是一个事件 $A = \{\text{掏出甲盒}\}$ 的发生概率为 $p=0.5$ 的独立重复伯努利试验, 而 $E = \{\text{事件 } A \text{ 第 } n+1 \text{ 次发生出现在第 } 2n-m+1 \text{ 次试验}\}$ 。另外可知, 事件 A 第 $n+1$ 次出现时已进行的试验次数服从 $r=n+1, p=0.5$ 的负二项分布。由负二项分布的分布律可知所求概率为

$$\begin{aligned} 2P(E) &= 2C_{2n-m}^n \left(\frac{1}{2}\right)^{n+1} \left(\frac{1}{2}\right)^{2n-m+1-(n+1)} \\ &= C_{2n-m}^n 2^{m-2n} \end{aligned}$$

3.思政融入

合理分配赌注问题

水平相同的两个赌徒 A 和 B , 在赌博中的某时刻, A 还需 a 点获胜, B 还需 b 点获胜, 此时两赌徒中止赌博, 应如何合理分配赌注? 这个问题通常称为点数问题, 是嗜好赌博的法国学者梅雷 (Meray H. C. R.) 于 1654 年向法国数学家帕斯卡 (Pascal B.) 提出的。为此帕斯卡和法国数学家费马 (Fer-mat P. de)(图 22-1) 于 1654 年 7

	月到 10 月之间进行了一系列通信讨论。帕斯卡利用数学归纳法证明了：B 与 A 应按之比来分赌注，式中 C_n^r 是 n 个元素中取 r 个元素的组合数。赌注分配问题成为概率论的起源。  法国数学家 帕斯卡  法国数学家 费马 图 22-1 作为二项分布的应用，在利用二项分布分析赌注问题时，让学生知其然亦知其所以然，了解赌注问题的源起和演进史，从数学史中学习数学知识，感悟数学家们的智慧与创新之处，培养学生的数学思维和创新意识。
分析评价	通过一道赌注问题学习了二项分布的应用，并了解了赌注问题的源起，让学生能够既知其然亦知其所以然，培养学生的数学思维和创新意识。
评价者	程国教授，商洛学院数学与计算机应用学院

案例编号	PTMS—023
案例标题	二项分布的泊松近似——交通事故概率计算
案例来源	原创
内容简介	理论联系实际，将知识应用于生活之中，通过交通事故概率计算，展示了二项分布泊松近似计算的优点，同时对学生进行交通出行安全教育，告诫学生要遵守交通规则，培养学生的社会责任感和规矩意识。
关键词	二项分布，泊松分布，交通事故
编写时间	2024-3-22
编著者	王瑞，助教，商洛学院数学与计算机应用学院 杨燕，副教授，商洛学院数学与计算机应用学院
素材形式	文字、图片
育人主题	交通出行安全教育，遵守交通规则，树立规矩意识
素材长度	858 字符
案例正文	1、知识点：二项分布 二项分布是概率论中重要的分布之一，在概率问题的求解中具有广泛的应用。 若随机变量 X 表示 n 重伯努利试验中事件 A 出现的次数，则有 $P(X = k) = C_n^k p^k (1 - p)^{n-k}, k = 0, 1, 2, \dots, n,$ 称随机变量 X 服从二项分布，记为 $X \sim B(n, p)$。其中 n 和 $p(0 < p < 1)$ 是二项分布的参数。上式即二项分布的分布律。 2. 案例简介 交通事故概率的计算 通过某路口(图 23-1)的每辆汽车发生事故的概率为 $p=0.0001$，假设在某段时间内有 1000 辆汽车通过此路口，试求在此段时间内发生事故次数 X 的概率分布和发生 2 次以上事故的概率。 分析 1000 辆汽车发生事故与否，可视为是 $n=1000$ 重的伯努利试验，出现事故的概率为 $p=0.0001$，因此 X 是服从二项分布的。



图 23-1

解 观测通过路口的 1000 辆汽车发生事故与否, 可视为是重复次数为 $n=1000$ 的伯努利试验, 出现事故的概率为 $p=0.0001$, 因此 X 是服从二项分布的, 即 $X \sim B(1000, 0.0001)$.

$$Q = P(X \geq 2) = 1 - P(X=0) - P(X=1)$$

由于 $n=1000$ 很大, 且 $p=0.0001$ 很小, 上式的计算工作量较大, 利用泊松分布的性质, 上面的二项分布可由参数

$$\lambda = np = 1000 \times 0.0001 = 0.1$$

的泊松分布来近似, 因此有

$$Q = P(X \geq 2) \approx 1 - \frac{0.1^0}{0!} e^{-0.1} - \frac{0.1^1}{1!} e^{-0.1} \approx 0.0045$$

类似可以思考以下问题:

(1) 经调查, 在某国中, 患色盲者占 0.25%, 试求:

① 为发现一例色盲患者至少需要检查 25 人的概率;

② 为使发现色盲患者的概率不小于 0.9, 至少要对多少人的辨色力进行检查?

(2) 某超市拟采用科学管理, 由该商店过去的销售记录知道, 某种商品每月的销售数量可以用参数 $\lambda=5$ 的泊松分布来描述, 现为了以 95% 以上的把握保证商品不脱销, 商店在月底至少应进该种商品多少件?

3. 思政融入

通过交通事故概率计算, **警醒学生** 遵守交通规则, 从我做起 (图 23-2), 不但维护了自身安全, 而且减少了交通事故对社会造成的负面影响。遵守交通规则也体现了社会责任感, 作为社会的一员,

	每个人都有责任维护社会的和谐稳定。给学生强调社会责任感，培养学生对社会的关心和责任感，积极参与社会建设。 通过遵守交通规则培养学生的规则意识，没有规矩不成方圆（图 23-3）。在一个社会中，规则是维护秩序和公平的基础。遵守交通规则就是在践行规则意识，这有助于培养公民在其他领域也遵守规则的习惯。思政教育强调规则意识，就是要培养公民尊重规则、遵守规则的意识 and 行为。 图 23-2 图 23-3
分析评价	通过交通事故概率计算，对学生进行交通出行安全教育和规矩意识教育，警醒学生遵守交通规则，从我做起，培养学生的社会责任感 and 规则意识，思政育人，润物无声。
评价者	程国教授，商洛学院数学与计算机应用学院

案例编号	PTMS—024
案例标题	泊松分布的定义——航空安全问题
案例来源	原创
内容简介	由航空安全问题认识泊松分布的实际意义和用途，学习泊松分布相关概率问题的计算。告诉学生生命可贵，不要虚度光阴，应珍惜时间，把握青春，实现价值。
关键词	泊松分布，航空安全问题
编写时间	2024-4-25
编著者	商洛学院
素材形式	文字、图片
育人主题	生命可贵，珍惜时间，把握青春，实现价值
素材长度	1109 字符
案例正文	1. 知识点：泊松分布 定义 若随机变量 X 的分布律为 $P(X = k) = \frac{\lambda^k}{k!} e^{-\lambda}, k = 0, 1, 2, \dots,$ 其中 λ 为大于 0 的参数，称随机变量 X 服从参数为 λ 的泊松分布，记为 $X \sim P(\lambda)$。 2. 案例简介 航空安全问题 例 在“时间就是金钱”的今天，出差、旅游喜欢乘坐飞机的人越来越多，以最大限度地节省时间。但是，空难事故也随之增加、假设近 30 年 A 国空难的发生情况如表 24-1 所示。表中每一年发生的空难次数为 0，频数为 13，表示 30 年中有 13 年没有发生空难；每一年发生的空难次数为 1，频数为 10，表示 30 年中有 10 年每年恰有 1 次空难发生，以此类推，从表 1 中不难看出，在这 30 年里 A 国共发生 30 次空难，平均每年发生一次，其中有一年发生了 5 次空难，是次数最多的一年。这一年发生这么多次空难，是巧合还是表示航空安全正在恶化？

表 24-1 近 30 年 A 国空难的发生情况

每一年发生的空难次数	频数（观测值）
0	13
1	10
2	3
3	3
4	0
5	1
6 次及以上	0

解 下面用泊松分布来解释这个问题。空难是小概率事件，假定 A 国空难这个事件满足泊松分布的两个特点：①空难发生是相互独立的，不会互相影响；②每次空难的发生概率是稳定的。显然，第二个条件是关键，如果成立，就说明 A 国的航空安全并没有在恶化，它发生的概率是稳定的；如果不成立，则说明 A 国的航空安全正在恶化。由表 24-1 可知 A 国平均每年发生空难的次数是 1 次，故参数 $\lambda=1$ 。用 X 表示 A 国每年的空难次数，则 X 近似服从参数 $\lambda=1$ 的泊松分布。因此 30 年中一年发生 2 次空难年份的估计值为

$$30 \times P(X=2) = 30 \times \frac{e^{-1}1^2}{2!} \approx 5.518$$

类似地可计算出频数估计值。由表 24-2 中的观测值和泊松分布的估计值，可得图 24-3。

表 24-2 近 30 年 A 国空难频数观测值与泊松分布的估计值

每一年发生的空难次数	频数观测值	频数估计值
0	13	11.04
1	10	11.04
2	3	5.518
3	3	1.84
4	0	0.46
5	1	0.1
6 次及以上	0	0

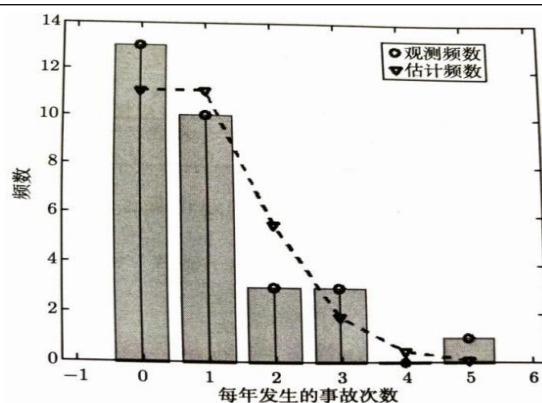


图 24-3 观测频数与泊松分布估计频数的拟合图

3.思政融入

用泊松分布来解释航空安全问题，让学生认识泊松分布的实际意义和用途，学习泊松分布相关概率问题的计算。老师可以通过诸多突如其来的空难事件，给学生进行生命教育，教会学生拥有健康的生命观，珍爱生命，更懂得生命的可贵。引领学生进行更深度的思考，为自己的成长与强大注入力量。告诉学生生命可贵，不要虚度光阴，应珍惜时间，把握青春，实现价值。（图 24-4）



图 24-4

分析评价

用泊松分布来解释航空安全问题，给学生进行生命教育，教会学生拥有健康的生命观，珍爱生命，更懂得生命的可贵。鼓励学生不要虚度光阴，应珍惜时间，把握青春，实现价值。

评价者

程国教授，商洛学院数学与计算机应用学院

案例编号	PTMS—025												
案例标题	泊松分布的计算——饮用水中的细菌数量												
案例来源	原创												
内容简介	通过从数学角度了解饮用水中的细菌数量，不仅学习了相关数学知识点——泊松分布，而且普及了我国现阶段水资源及饮用水现状。引导学生从自身做起保护水资源，激发学生珍爱水资源，节约用水，从生活点滴小事行动。												
关键词	泊松分布，饮用水中的细菌数，												
编写时间	2024-4-20												
编著者	王瑞，助教，商洛学院数学与计算机应用学院 杨燕，副教授，商洛学院数学与计算机应用学院												
素材形式	文字、图片												
育人主题	引导学生保护水资源，节约用水												
素材长度	977 字符												
案例正文	1. 知识点：泊松分布 若随机变量 X 的分布律为 $P(X = k) = \frac{\lambda^k}{k!} e^{-\lambda}, k = 0, 1, 2, \dots,$ 其中 λ 为大于 0 的参数，称随机变量 X 服从参数为 λ 的泊松分布，记为 $X \sim P(\lambda)$。 2. 案例简介 饮用水中的细菌数 为监测饮用水的污染情况，现检验某社区每毫升饮用水中的细菌数，共得 400 个记录，如表 25-1 所示。 表 25-1 某社区每毫升饮用水中的细菌数 <table><tr><td>细菌数</td><td>0</td><td>1</td><td>2</td><td>≥ 3</td><td>合计</td></tr><tr><td>次数</td><td>243</td><td>120</td><td>31</td><td>6</td><td>400</td></tr></table> 试分析饮用水中细菌数的分布是否服从泊松分布。若服从，按泊松分布计算每毫升饮用水中细菌数的概率及理论次数，并将频率	细菌数	0	1	2	≥ 3	合计	次数	243	120	31	6	400
细菌数	0	1	2	≥ 3	合计								
次数	243	120	31	6	400								

分布与泊松分布直观比较。

解 经计算得每毫升水中平均细菌数 $\bar{x}=0.500$ ，方差 $s^2=0.496$ ，两者很接近，因为泊松分布的均值和方差相等，故可以认为每毫升饮用水中的细菌数服从泊松分布。以 $\bar{x}=0.500$ 估计泊松分布的参数 λ ，得

$$P(X=k)=\frac{0.5^k}{k!}e^{-0.5}, k=0, 1, 2, \dots$$

计算结果如表 25-2 所示，比较表中次数与理论次数两行的数据，频率与概率两行的数据，可见细菌数的频率分布与 $\lambda=0.5$ 的泊松分布是相当吻合的，进一步说明了用泊松分布来描述单位容积饮用水中的细菌数的分布是适合的。

注：泊松分布的分布律如图 25-3 所示。

泊松分布的特征如下：

- (1) 泊松分布是一种描述和分析稀有事件的概率分布。要观测到这类事件，样本量 n 必须较大。
- (2) λ 是泊松分布所依赖的唯一参数。 λ 值越小，分布越偏倚，随着 λ 的增大，分布趋于对称。
- (3) 当 $\lambda=20$ 时，泊松分布接近于正态分布；当 $\lambda=50$ 时，可以认为泊松分布呈正态分布。在实际工作中，当 $\lambda \geq 20$ 时就可以用正态分布来近似地处理泊松分布的问题。
- (4) 泊松分布还有一个显著特征就是其均值与方差相等。

表 25-2 每毫升饮用水中细菌数的泊松分布

细菌数	0	1	2	≥ 3		合计
次数	243	120	31	6		400
频率	0.6075	0.3000	0.0775	0.0150		1.00
概率	0.6065	0.3033	0.0758	0.0144		1.00
理论次数	242.60	121.32	30.32	5.76		400

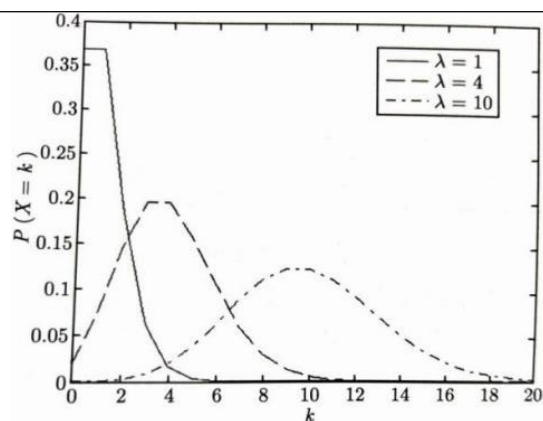


图 25-3 泊松分布的分布律

3.思政融入

通过从数学角度了解饮用水中的细菌数量，不仅学习了相关数学知识点，还给学生普及了我国现阶段水资源及饮用水现状，引导学生讨论如何从自身做起保护水资源，激发学生珍惜水、爱护水，（图 25-4）从生活点滴小事行动，厉行节约。

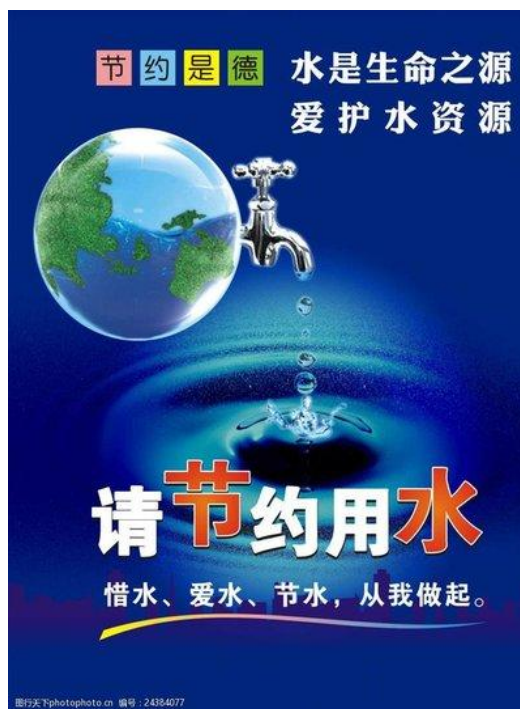


图 25-4

分析评价	通过从数学角度了解饮用水中的细菌数量，不仅学习了相关数学知识点，还给学生普及了我国现阶段水资源及饮用水现状，引导学生讨论如何从自身做起保护水资源。
评价者	程国教授，商洛学院数学与计算机应用学院

案例编号	PTMS—026
案例标题	连续型随机变量及其概率密度——身高分布
案例来源	原创
内容简介	通过对 120 名 12 岁男童身高数据的分析，学习连续型随机变量及其概率密度函数的性质，让学生了解数学源于生活，学习要善于发现。
关键词	身高分布、连续型随机变量、概率密度函数
编写时间	2024-5-5
编著者	王瑞，助教，商洛学院数学与计算机应用学院
素材形式	文字、图片
育人主题	数学源于生活，要善于发现探究
素材长度	1558 字符
案例正文	1. 知识点：连续型随机变量及其概率密度 定义 设 X 是随机变量，如果存在非负可积函数 $f(x)$，对任意的常数 $a, b(a \leq b)$，有 $P(a \leq X \leq b) = \int_a^b f(x)dx$ 则称 X 为连续型随机变量，同时称 $f(x)$ 为 X 的概率密度函数，或简称为概率密度。 性质： (1) 非负性： $f(x) \geq 0$ (2) 正则性： $\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)dx = 1$ 另外，还可推得： (3) 连续型随机变量取任何特定值的概率为零，这是由于 $P(X = a) = \int_a^a f(x)dx = 0$ (4) 连续型随机变量落入某个区间 $[a, b]$ 的概率等于 $[a, b]$ 上曲边梯形的面积。这个是由定积分的几何意义得到。简单地说，面积

可表示概率。

2. 案例简介

身高分布

例 为了研究某市 12 岁男童身高的分布，从全市所有 12 岁男童中随机抽取 $n=120$ 位男童，分别量取他们的身高，得到 120 个身高的数据。这些数据包含的信息是分散的，因此对它们进行等距分组，组距为 $\Delta d=4\text{cm}$ ，得到频数分布如表 26-1 所示。试结合频率/组距直方图来解释密度函数的由来和含义。

表 26-1 某市 120 位男童的身高分布

身高/cm	频数	频率	频率/组距
(124, 128]	1	0.0083	0.0021
(128, 132]	2	0.0167	0.0042
(132, 136]	10	0.0833	0.0208
(136, 140]	22	0.1833	0.0458
(140, 144]	37	0.3083	0.0771
(144, 148]	26	0.2167	0.0542
(148, 152]	15	0.1250	0.0313
(152, 156]	4	0.0333	0.0083
(156, 160]	2	0.0167	0.0042
(160, 164]	1	0.0083	0.0021
合计	120	1	—

由表 1 画出身高频率/组距直方图，如图 26-2 所示。

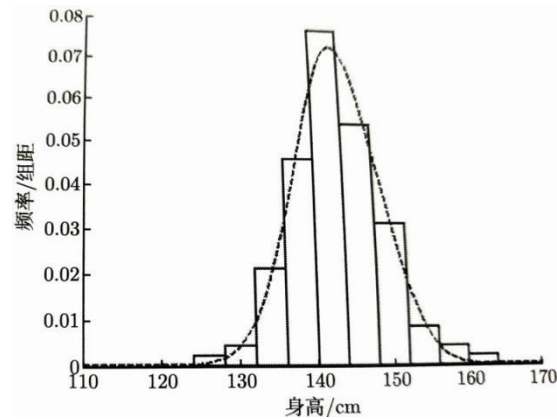


图 26-2 12 岁男童身高频率/组距直方图

在图 26-2 中,直方图中每个小矩形的高度不是频数也不是频率,而是相应组的频率除以组距、这样画出的直方图每个小矩形的面积等于身高落到相应组的频率画出的直方图有如下三个特点。

- (1)非负性:直方图中每个小矩形的高度都大于或等于零。
- (2)规一性:直方图的面积之和等于 1,这是由于频率之和等于 1。
- (3)频率表达性:身高落到区间 $(a, b]$ 上的频率约等于 $x=a, x=b$, x 轴和直方图顶部围成的面积。这三条性质与概率密度函数的性质类似。

现在逐步抽取更多的样本,如抽取 1200 位、12000 位 12 岁男童,测量他们的身高,作频率直方图,但这时组距取得更小,如 2cm、0.5cm 等,会发现直方图顶部的相邻两个台阶(图 26-2 的水平线段)高度相差越来越小,水平线段越来越多,且越来越短,台阶所表示的函数越来越光滑。虽然该城市 12 岁男童的数量是有限的,但这不妨碍想象当抽到的个体数量 $n \rightarrow +\infty$, 组距 $\Delta d \rightarrow 0$ 时,直方图顶部的曲线会收敛到一条光滑曲线,如图 26-2 所示虚线。这个虚线所代表的曲线就是该市 12 岁男童身高的概率密度函数。

理解了上述得到概率密度函数的过程以及概率密度函数的三条重要特点,不难理解它的其他性质:

- (1)连续型随机变量取任何特定值的概率为零,这是由于

$$P(X = a) = \int_a^a f(x)dx = 0$$

- (2)连续型随机变量落入某个区间 $[a, b]$ 的概率等于 $[a, b]$ 上曲边梯形的面积。这个是由定积分的几何意义得到。简单地说,面积可表示概率。

- (3)“概率密度”名称的来源:概率密度的定义与物理学上细棒的线密度(质量密度)的定义类似。

由定积分的性质,可得

$$\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{P(a \leq X \leq a + \Delta x)}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\int_a^{a+\Delta x} f(x)dx}{\Delta x} = f(a)$$

而细棒的线密度为

	$\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{m(a \leq X \leq a + \Delta x)}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\int_a^{a+\Delta x} m(x) dx}{\Delta x} = m(a)$ 比较上面两式，可以发现概率密度与细棒的线密度的定义，从表达式来说是类似的。 (4) 当Δx充分小时，$P(a \leq X \leq a + \Delta x) \approx f(x)\Delta x$，因此概率密度函数的值反映了随机变量落到$x$附近的概率大小，$x$点处的高度（函数值）不是概率，但它与随机变量落到附近的概率大小成正比。 注 1：概率密度函数是描述连续型随机变量的数学工具，有了它就可以方便地计算相关连续型随机变量的概率。例如，若已知随机变量X的概率密度函数为$f(x)$，则要计算随机变量X落到区间$(a,b]$上的概率，只要计算$f(x)$在$(a,b]$上的积分，即 $P(a < X \leq b) = \int_a^b f(x) dx$ 由定积分的几何意义，此概率即为$f(x), y = f(x), x = a, x = b$和$x$轴围成的图形面积$S$。 注 2：理论上可以通过作频率直方图得到概率密度函数，但这个过程是相当困难的，要花费较大的成本，不仅需要相关领域知识和经验，还需要丰富的数理统计知识来对这个过程进行理论指导，概率论的目的不是如何得到它，而是研究概率密度函数的性质，并利用概率密度函数来计算概率。 3.思政融入 通过对 120 名 12 岁男童身高数据的分析让学生感受生活处处可统计，数据处处有规律，生活离不开数学，数学来源于生活，善于发现和探究很重要，培养学生对数学与统计的浓厚兴趣，提升其数学涵养。
分析评价	通过生活中的统计引出对连续型随机变量及其概率密度函数性质的学习，让学生了解数学源于生活，学习是要善于发现。
评价者	程国教授，商洛学院数学与计算机应用学院

案例编号	PTMS—027
案例标题	连续型随机变量概率计算——供电量不足问题
案例来源	原创
内容简介	通过对城市供电量问题的解答，让学生理解连续型随机变量及其概率密度的概念，掌握了连续型随机变量的概率计算，同时给学生倡导节约用电，低碳生活的生活理念。
关键词	连续型随机变量，概率密度，概率计算
编写时间	2024-5-9
编著者	王瑞，助教，商洛学院数学与计算机应用学院
素材形式	文字，图片
育人主题	节约用电，低碳生活
素材长度	646 字符
案例正文	1. 知识点：连续型随机变量及其概率密度 定义 设 X 是随机变量，如果存在非负可积函数 $f(x)$，对任意的常数 $a, b(a \leq b)$，有 $P(a \leq X \leq b) = \int_a^b f(x)dx$ 则称 X 为连续型随机变量，同时称 $f(x)$ 为 X 的概率密度函数，或简称为概率密度。 性质 1) 非负性： $f(x) \geq 0$ 2) 正则性： $\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)dx = 1$ 几何意义 随机变量 X 落入区间 $[a, b]$ 的概率等于曲线 $y = f(x)$ 在区间 $[a, b]$ 上形成的曲边梯形的面积。 2. 案例简介 供电量不足的概率计算 例 某城市每天用电量不超过 100 万度，以 ξ 表示每天的耗电率（即用电量除以 100 万度），它具有概率密度为

	$p(x) = \begin{cases} 12x(1-x)^2, & 0 < x < 1 \\ 0, & \text{其他} \end{cases}$ 若该城市每天的供电量仅有 80 万度,则供电量不足的概率是多少? 如果每天供电量为 90 万度,又是怎样的情况呢? 解 $P(\xi > 0.8) = \int_{0.8}^1 12x(1-x)^2 dx = 0.0272$ 因此若每天的供电量仅为 80 万度,则供电量不足的概率为 0.0272. $P(\xi > 0.9) = \int_{0.9}^1 12x(1-x)^2 dx = 0.0037$ 因此,如果每天供电量为 90 万度,则供电量不足的概率减小到 0.0037。 注: 连续型随机变量在客观世界和人类社会中普遍存在,几乎所有连续变化的量都可以看作连续型随机变量,如人的身高、体重、星球的质量等。 3. 思政融入 在讲授连续型随机变量的概率计算时,通过对城市供电量问题的解答,告诉学生,电是一种能源,1 度电可以做很多有意义的事情,虽然我国的发电量很大,出现供电量不足的概率很低,但是生活中电的浪费问题非常突出。节约节俭是中华民族的传统美德,我们要继续传承下去,给学生倡导节约用电,低碳生活的生活理念。  图 27-1
分析评价	从生活应用的点滴出发挖掘课程元素,使得课程内容的学习贴近实际,不再是纸上谈兵,让学生感受到学习过程的必要性,增强其学习的积极性。
评价者	程国教授, 商洛学院数学与计算机应用学院

案例编号	PTMS—028
案例标题	正态分布——高尔顿钉板试验
案例来源	原创
内容简介	通过高尔顿钉板试验展示了正态分布产生过程，高尔顿的故事也向学生们传达了天才出自勤奋，真知往往来源于契而不舍的追寻的过程。鼓励学生勤奋学习，重视积累。
关键词	高尔顿钉板试验、正态分布
编写时间	2024-5-11
编著者	王瑞，助教，商洛学院数学与计算机应用学院
素材形式	文字、图片
育人主题	天才出自勤奋，知识在于积累
素材长度	1761 字符
案例正文	1. 知识点：正态分布 定义 设 X 为连续型随机变量，若 X 的概率密度为 $f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} e^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}}, -\infty < x < +\infty$ 其中 $\mu, \sigma (\sigma > 0)$ 为参数，则称随机变量 X 服从参数为 μ 和 σ^2 的正态分布，也叫高斯分布，记为 $X \sim N(\mu, \sigma^2)$。 正态分布的分布函数为 $F(x) = P(X \leq x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} \int_{-\infty}^x e^{-\frac{(t-\mu)^2}{2\sigma^2}} dt, -\infty < x < +\infty。$ 2. 案例简介 高尔顿钉板试验 例 高尔顿钉板如图 28-1 所示，其中每一个黑点表示钉在板上的一颗钉子，相邻钉子的距离均相等，上一层的每一颗钉子的水平位置恰好位于下一层的两颗钉子的正中间。从入口处放进一个直径略小于两颗钉子之间的距离的玻璃小圆球，在小圆球向下降落的过程中，碰到钉子后以 0.5 的概率向左或向右滚下，于是又碰到下一

层钉子。如此继续下去，直到滚到底板的一个格子内为止。把同样大小的小圆球不断从入口处放下，只要球的数目相当大，它们在底板将堆成近似于正态分布的密度函数图形（即中间高，两头低，呈左右对称的古钟型）。

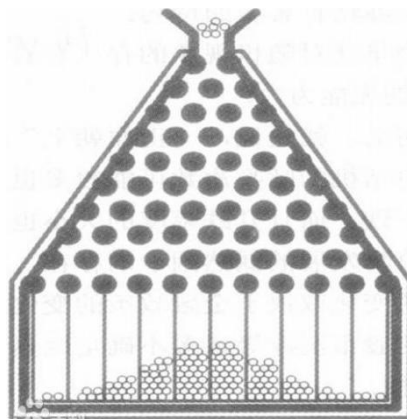


图 28-1 高尔顿钉板

这是英国生物统计学家高尔顿设计的用来研究频率稳定性的模型，称为高尔顿钉板（或高尔顿板）。这里给出 9 层高尔顿钉板试验设计：小圆球自顶部落下，在每一层遭遇隔板，以 0.5 的概率向左右下落，底部 9 个隔板，形成 10 个槽。模拟 10000 个小圆球依次落下估计高尔顿钉板的板底各槽中小圆球数量。

解 设随机事件 A 表示小圆球向右落下，则 A 出现的概率为 0.5。小圆球从顶部落下，落到底部的过程要碰到 9 个钉子，分别以 0.5 的概率向左右落下。对底部 10 个槽从左到右依次编码为 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9。如果小圆球碰到 9 个钉子皆向左落，则它落入 0 号槽；如果碰到 9 个钉子小圆球皆向右落，则它最后落入 9 号槽；如果碰到的 9 个钉子有向左落的，也有向右落的，可以验证，在这种情况下，小圆球最后落入的槽号恰好是其中向右落的钉子的个数。例如，如果小圆球下落过程中碰到的 9 颗钉子中有 6 颗向左落，3 颗向右落，则小圆球最终落入 3 号槽。这是典型的 9 重伯努利试验，结果可以由对 9 次伯努利试验求和得到。10000 个小球中落入 10 个槽内的小球数对应于随机变量 x 取值 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9 的次数。因此创建 9 行 10000 列的 0-1 随机矩阵（矩阵有 90000 个元素，每个元素非 0 即 1，取 0 和 1 的概率皆为 0.5），

对行求和便得到 10000 次 9 重伯努利试验结果计算机模拟小球落入 10 个槽的次数列在表 28-2 中。

表 28-2 9 重伯努利试验结果

X	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
出 现 次数	22	185	719	1627	2459	2458	1630	730	152	18

随机变量 x 取值为 0，对应圆球落入 0 号槽（第一个槽）；……； x 取值为 9，对应小圆球落入 9 号槽（最后一个槽）。条形图显示频率如图 28-3 所示。

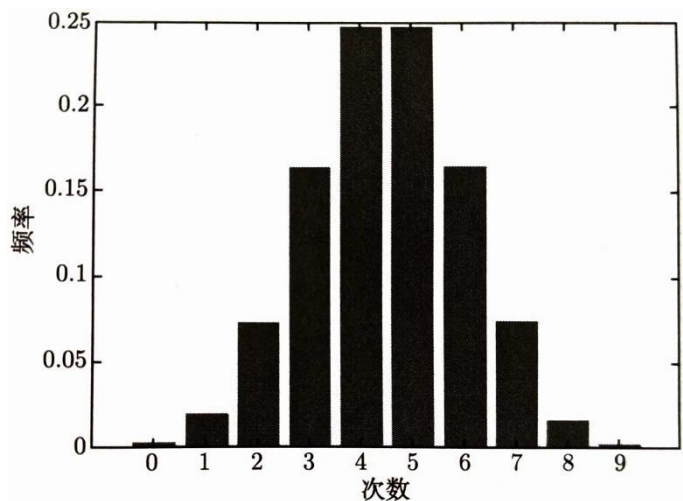
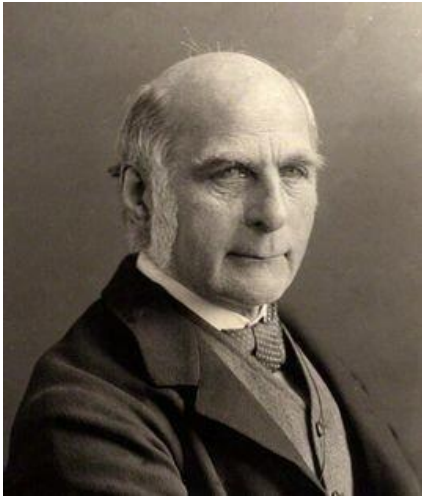


图 28-3 9 重伯努利试验条形图

注 在高尔顿钉板试验中，每个小圆球从顶部落下，落入的槽号是对二项分布的一次抽样所得数据。

图 28-3 与正态分布非常相似。

弗朗西斯·高尔顿（Sir Francis Galton， 1822—1911）（图 28-4）是英国著名的统计学家、心理学家和遗传学家。他是达尔文的表弟，虽然不像达尔文那样声名显赫，但也不是无名之辈。并且，高尔顿幼年有神童之称，长大是才子，九十年的人生丰富多彩，是个名副其实的博学家。他涉猎范围广泛，研究水平颇深，纵观科学史，在同辈学者中能望其项背之人寥寥可数。他涉足的领域包括天文、地理、气象、机械、物理、统计、生物、遗传、医学、生理、心理等，还有与社会有关的人类学、民族学、教育学、宗教，以及优生学、指

	纹学、照相术、登山术，等等。  图 28-4 弗朗西斯·高尔顿（1822—1911） 在达尔文发表了《物种起源》之后，高尔顿也将研究方向转向生物及遗传学，他第一个对同卵双胞胎进行研究，论证了指纹的永久性和独特性。他从遗传的观点研究人类智力并提出“优生学”，是第一个强调把统计学方法应用到生物学中去的人，他设计了一个钉板实验，从统计的观点来解释遗传现象，展示了正态分布的产生过程。 3.思政融入 通过高尔顿钉板试验展示了正态分布产生过程，引发学生对正态分布的学习积极性，并加深了对其现实意义的理解，对诸多统计规律与现象的认识。同时介绍高尔顿的故事，这个名副其实的博学家，涉猎范围广泛，纵观科学史，在同辈学者中能望其项背之人寥寥可数。但是这些都离不开他的勤奋。向学生们传达天才出自勤奋，真知往往来源于契而不舍的追寻的过程。鼓励学生勤奋学习，重视积累。
分析评价	通过高尔顿钉板试验展示了正态分布产生过程，高尔顿的故事也向学生们传达了天才出自勤奋，知识在于积累。鼓励学生勤奋学习，重视积累。
评价者	程国教授，商洛学院数学与计算机应用学院

案例编号	PTMS—029
案例标题	正态分布的应用——招聘问题
案例来源	原创
内容简介	通过一个招聘问题能否录用情况的分析展开对连续型随机变量的常用分布-正态分布的学习。引发学生对就业情况的关注，鼓励学生在校期间练就过硬专业本领，锻造自身专业技能。
关键词	招聘问题中的概率、连续型随机变量的正态分布
编写时间	2024-5-15
编著者	王瑞，助教，商洛学院数学与计算机应用学院
素材形式	文字、图片
育人主题	练就过硬专业本领，锻造自身专业技能。
素材长度	916 字符
案例正文	1. 知识点：连续型随机变量的正态分布 定义 设 X 为连续型随机变量，若 X 的概率密度为 $f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} e^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}}, -\infty < x < +\infty$ 其中 $\mu, \sigma (\sigma > 0)$ 为参数，则称随机变量 X 服从参数为 μ 和 σ^2 的正态分布，也叫高斯分布，记为 $X \sim N(\mu, \sigma^2)$。 正态分布的分布函数为 $F(x) = P(X \leq x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} \int_{-\infty}^x e^{-\frac{(t-\mu)^2}{2\sigma^2}} dt, -\infty < x < +\infty。$ 为研究和计算方便，取 $\mu = 0, \sigma^2 = 1$，这样就得到了标准正态分布，记为 $X \sim N(0,1)$，其概率密度为 $\varphi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{x^2}{2}}, -\infty < x < +\infty$ 分布函数为

$$\Phi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^x e^{-\frac{t^2}{2}} dt, -\infty < x < +\infty$$

2. 案例简介

招聘问题

例 某企业准备通过招聘考试招收 300 名职工,其中正式工 280 人,临时工 20 人;报考的人数是 1657 人,考试满分是 400 分。考试后得知,考试总平均成绩 $\mu=166$ 分,360 分以上的高分考生 31 人。某考生 B 得 256 分,他能否被录取? 能否被聘为正式工?

解: 分两步来解答。

第一步: 预测最低分数。最低分数线为 x_1 , 考生成绩为 ξ , 则对一次成功的考试来说, ξ 服从正分布, 由题意可知 $\xi \sim N(166, \sigma^2)$ 。这样, $\eta = \frac{\xi - 166}{\sigma} \sim N(0, 1)$, 因为高于 360 分考生的频率是 $\frac{31}{1657}$, 所以有

$$P(\xi > 360) = P(\eta > \frac{360 - 166}{\sigma}) \approx \frac{31}{1657}$$

因此,

$$P(\eta \leq \frac{360 - 166}{\sigma}) = \Phi(\frac{360 - 166}{\sigma}) \approx 1 - \frac{31}{1657} \approx 0.981$$

查标准正态分布表可知 $0.981 = \Phi(2.08)$,

因而 $\frac{360 - 166}{\sigma} \approx 2.08$, 即 $\sigma \approx 93$, 故 $\xi \sim N(166, 93^2)$

因为最低分数线的确定应使录取的考生的频率等于 $\frac{300}{1657}$,

所以

$$P(\eta \geq \frac{x_1 - 166}{93}) \approx \frac{300}{1657}$$

于是

$$P(\eta \leq \frac{x_1 - 166}{93}) = \Phi(\frac{x_1 - 166}{93}) \approx 1 - \frac{300}{1657} \approx 0.819$$

查标准正态分布表可知 $0.819 = \Phi(0.91)$,

因而得 $\frac{x_1 - 166}{93} \approx 0.91$, 由此求得 $x_1 \approx 251$, 也就是说, 最低分数线是 251。

	第二步：预测考生 B 的考试名次。在 $\xi=256$ 分时，查标准正态分布表可知 $P(\eta \leq \frac{256-166}{93}) = \Phi(\frac{256-166}{93}) \approx 0.8315$ 这表明，因为考试成绩高于 256 分的频率是 $1-0.8315=0.1685$，即成绩高于考生 B 的人数大约占总考生的 16.85%，所以名次排在考生 B 之前的考生人数约有 $1657 \times 16.85\% \approx 280$ 即考生 B 大约排在 281 名。由于一共招生 300 名，故考生 B 可以被录取，但是正式工只招 280 名，而 $281 > 280$，故考生 B 被录取为临时工的可能性很大。 3.思政融入 就业问题是学生关注度很高的一个问题，尽管许多毕业生拥有丰富的理论知识和专业技能，但在实际工作中却难以发挥，无法满足企业的需求。因此，毕业生需要加强实践能力和创新思维的培养，以提高自己的综合素质。此外，经济发展大环境也是影响就业形势的重要因素之一。目前，我国经济正处于转型升级的关键时期，需要大量高素质的人才来推动经济发展。同时，国家也出台了一系列政策来支持大学生就业创业，为青年人提供了更多的就业机会。但是，随着经济的快速发展，一些地区出现了产业结构不合理、环境污染等问题，也给毕业生就业带来了一定的压力。 当前如此严峻的就业形势，非毕业班学生也应有所了解。加强宣传动员，学生才能更积极地从日常生活、平时学习中行动起来，鼓励学生在校期间练就过硬专业本领，锻造自身专业技能。
分析评价	从一道就业例题导入课堂，既学习了本节要点，又引发学生对就业情况的关注，加强宣传动员，使学生更积极地从日常生活、平时学习中行动起来，鼓励学生在校期间练就过硬专业本领，锻造自身专业技能。
评价者	程国教授，商洛学院数学与计算机应用学院

案例编号	PTMS—030
案例标题	正态分布的标准化定理——交通线路选择问题
案例来源	原创
内容简介	从一道交通线路选择问题学习服从正态分布的连续型随机变量的标准化定理，找寻解决问题的更优方案，引导学生机遇与挑战并存的情况下只有积极应对才能化劣势为优势。
关键词	正态分布的标准化定理，交通路线选择问题
编写时间	2024-5-16
编著者	王瑞，助教，商洛学院数学与计算机应用学院
素材形式	文字、图片
育人主题	机遇与挑战并存的情况下只有积极应对才能化劣势为优势
素材长度	684 字符
案例正文	1. 知识点：服从正态分布的连续型随机变量的标准化定理 定义 设 X 为连续型随机变量，若 X 的概率密度为 $f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} e^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}}, -\infty < x < +\infty$ 其中 $\mu, \sigma (\sigma > 0)$ 为参数，则称随机变量 X 服从参数为 μ 和 σ^2 的正态分布，也叫高斯分布，记为 $X \sim N(\mu, \sigma^2)$。 定理（标准化定理）： 若 $X \sim N(\mu, \sigma^2)$，则 $Z = \frac{X - \mu}{\sigma} \sim N(0, 1)$。 2. 案例简介 交通线路选择问题 例 某人要乘车到飞机场搭乘飞机，现有两条路线可供选择。走第一条路线所需时间（单位：min）为 X_1，$X_1 \sim N(50, 100)$；走第二条路线所需时间（单位：min）为 X_2，$X_2 \sim N(60, 16)$。为及时赶到机场： （1）若有 70min，应选择哪一条路线更有把握？若有 65min 呢？

	(2) 若走第一条路线, 并以 95% 的概率保证能及时赶上飞机, 距飞机起飞时刻至少需要提前多少时间出发? 若两条路线存在择优选择的问题, 则如何比较“优劣”呢? 解 (1) 若有 70min 可用, 两条路线可及时赶到机场的概率分别为 $P(0 < X_1 \leq 70) = \Phi\left(\frac{70-50}{10}\right) - \Phi\left(\frac{0-50}{10}\right) = \Phi(2) - \Phi(-5) \approx \Phi(2)$ $P(0 < X_2 \leq 70) = \Phi\left(\frac{70-60}{4}\right) - \Phi\left(\frac{0-60}{4}\right) = \Phi(2.5) - \Phi(-15) \approx \Phi(2.5)$ 因为 $\Phi(2.5) > \Phi(2)$, 所以选第二条路线较好。 若有 65min 可用, 则 $P(0 < X_1 \leq 65) = \Phi\left(\frac{65-50}{10}\right) - \Phi\left(\frac{0-50}{10}\right) = \Phi(1.5) - \Phi(-5) \approx \Phi(1.5)$ $P(0 < X_2 \leq 65) = \Phi\left(\frac{65-60}{4}\right) - \Phi\left(\frac{0-60}{4}\right) = \Phi(1.25) - \Phi(-15) \approx \Phi(1.25)$ 因为 $\Phi(1.5) > \Phi(1.25)$, 所以选第一条路线较好。 (2) 设需要提前 x min 出发, 应有 $0.95 = \Phi(1.65) = P(0 < X_1 \leq x) \approx \Phi\left(\frac{x-50}{10}\right)$ 故 $\frac{x-50}{10} \geq 1.65$, 解得 $x \geq 66.5$。 因此距离飞机起飞时刻至少需要提前 66.5min 出发, 才能以 95% 的概率保证及时赶上飞机。 3. 思政融入 通过交通线路选择问题, 告诉学生选择是机遇与风险并存的, 做了选择, 后期怎样演化未知, 可能好, 可能不好。生活的随机性, 生活的危机不会因为我们缺乏勇气、虚度年华, 就放弃找上门来, 重要的是我们要有勇气去面对生活中的困难, 不要等待, 机遇与挑战并存的情况下只有积极应对才能化劣势为优势, 使自己变得更好。
分析评价	从一道交通线路选择问题找寻解决问题的更优方案, 引导学生机遇与挑战并存的情况下只有积极应对才能化劣势为优势。
评价者	程国教授, 商洛学院数学与计算机应用学院

案例编号	PTMS—031
案例标题	二维离散型随机变量的联合分布律——婴儿出生问题
案例来源	原创
内容简介	通过婴儿出生问题，理解二维离散型随机变量的联合分布律的数学概念，培养学生关注民生国策、经济发展、地区规划的家国视野和全局意识，深植家国情怀。
关键词	二维离散型随机变量，联合分布律，婴儿出生问题
编写时间	2024-4-26
编著者	王瑞，助教，商洛学院数学与计算机应用学院
素材形式	文字
育人主题	培养学生关注民生国策、经济发展、地区规划的家国视野和全局意识，深植家国情怀。
素材长度	842 字符
案例正文	1. 知识点：二维离散型随机变量的联合分布律 定义 若二维随机变量 (X, Y) 只去有限个或可列多个 (x_i, y_j)，则称 (X, Y) 为二维离散型随机变量，称 $p_{ij} = P(X = x_i, Y = y_j) (i, j = 1, 2, \dots)$ 为 (X, Y) 的联合分布律或联合概率分布，简称为分布律或概率分布。 性质：（1）非负性： $p_{ij} \geq 0, i, j = 1, 2, \dots$ （2）正则性： $\sum_i \sum_j p_{ij} = 1$ 2. 案例简介 婴儿出生问题 例 记 X 为某医院一天出生的婴儿个数，记 Y 为其中的男婴个数，设 (X, Y) 的联合分布律为 $P(X = n, Y = m) = \frac{e^{-14} 7.14^m 6.86^{n-m}}{m!(n-m)!}$ 其中， $m=0, 1, \dots, n; n=0, 1, \dots$ 求：

- (1) 边缘分布律;
 (2) 条件分布律;
 (3) 当 $X=20$ 时, Y 的条件分布律。

解: (1) X 的边缘分布律为

$$\begin{aligned} P(X=n) &= \sum_{m=0}^n P(X=n, Y=m) = \sum_{m=0}^n \frac{e^{-14} 7.14^m 6.86^{n-m}}{m!(n-m)!} \\ &= \frac{e^{-14}}{n!} \sum_{m=0}^n C_n^m 7.14^m 6.86^{n-m} \\ &= \frac{e^{-14}}{n!} (7.14 + 6.86)^n \\ &= \frac{14^n e^{-14}}{n!} (n=0,1,2,\dots) \end{aligned}$$

Y 的边缘分布律为

$$\begin{aligned} P(Y=m) &= \sum_{n=m}^{+\infty} P(X=n, Y=m) = \frac{e^{-14} 7.14^m}{m!} \sum_{n=m}^{+\infty} \frac{6.86^{n-m}}{(n-m)!} \\ &= \frac{e^{-7.14}}{m!} 7.14^m (m=0,1,2,\dots) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} (2) \quad P(Y=m | X=n) &= \frac{P(X=n, Y=m)}{P(X=n)} = \frac{\frac{e^{-14} 7.14^m}{m!} \frac{6.86^{n-m}}{(n-m)!}}{\frac{e^{-14} 14^n}{n!}} \\ &= C_n^m 0.51^m 0.49^{n-m} (n=0,1,2,\dots; m=0,1,2,\dots,n) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} P(X=n | Y=m) &= \frac{P(X=n, Y=m)}{P(Y=m)} = \frac{6.86^{n-m}}{(n-m)!} e^{-6.86} \\ &= \frac{6.86^{n-m}}{(n-m)!} e^{-6.86}, m=0,1,2,\dots; n=m, m+1, \dots \end{aligned}$$

在婴儿个数为 n 的条件下, 男婴个数服从 $B(n, p)$, $p=0.51$;
 在男婴个数为 m 的条件下, 婴儿个数 X 服从参数 $\lambda=6.86$ 的泊松分布, 因此女婴个数 $X-Y$ 也服从同样的分布, 这是由于

$$P(X=n | Y=m) = P(X-Y=n-m | Y=m)$$

	(3) $X=20$ 时, Y 的条件分布律为 $P(Y = m X = 20) = C_{20}^m 0.51^m 0.49^{20-m}, m = 0, 1, 2, \dots, 20$ 显然, 联合分布律不等于两个边缘分布律的乘积, 因此婴儿个数和男婴个数不独立。另外, 婴儿个数的边缘分布律不等于婴儿个数的条件分布律, 男婴个数的边缘分布律也不等于男婴个数的条件分布律, 都说明了两个随机变量的非独立性。这也符合人们的直观, 因为男婴包含在婴儿之内, 当然不能相互独立了。 3.思政融入 通过求解婴儿出生问题, 给学生普及国家人口情况。培养学生关注民生国策、经济发展、地区规划的家国视野和大局意识, 深植家国情怀。 国家卫生健康委(2023 年 10 月 12 日)发布了 2022 年我国卫生健康事业发展统计公报, 公报显示, 2022 年全国出生人口 956 万人。2023 年 1 月国家统计局发布的数据显示, 2022 年年末全国人口(包括 31 个省、自治区、直辖市和现役军人的人口, 不包括居住在 31 个省、自治区、直辖市的港澳台居民和外籍人员)141175 万人, 比上年末减少 85 万人。2022 年全年出生人口 956 万人, 人口出生率为 6.77‰; 死亡人口 1041 万人, 人口死亡率为 7.37‰; 人口自然增长率为-0.60‰。 出生率数据能够反映一个社会的发展趋势和变化情况。了解出生率可以帮助政府进行社会经济发展规划, 包括教育、医疗、就业等方面的资源分配和社会服务建设; 出生率数据是分析人口结构的重要依据。通过统计调查可以了解不同地区、不同群体、不同年龄段的出生率差异, 为人口结构研究提供数据支持等等。
分析评价	通过引例可以培养学生关注民生国策、经济发展、地区规划的家国视野和大局意识, 深植家国情怀。
评价者	程国教授, 商洛学院数学与计算机应用学院

案例编号	PTMS—032
案例标题	随机变量的独立性——轮船停泊问题
案例来源	原创
内容简介	通过一个轮船停泊例子展示了二维随机变量的独立性，同时揭示我们每个个人都遵从马克思主义哲学中独立性与联系性的辩证关系，生存在集体与自我之间。
关键词	随机变量的独立性，轮船停泊问题
编写时间	2024-5-18
编著者	王瑞，助教，商洛学院数学与计算机应用学院
素材形式	文字
育人主题	独立性与联系性的辩证关系，个人与集体
素材长度	522 字符
案例正文	1. 知识点：随机变量的独立性 定义 设二维随机变量 (X,Y) 的联合分布函数为 $F(x,y)$，且 (X,Y) 关于 X,Y 的边缘分布函数分别为 $F_X(x), F_Y(y)$，若对任意的一组取值 (x,y)，有 $F(x,y) = F_X(x)F_Y(y)$ 成立，则称随机变量 X,Y 是相互独立的。 由定义可得，当随机变量 X,Y 相互独立时 $P(X \leq x, Y \leq y) = P(X \leq x)P(Y \leq y),$ 等价于 $f(x,y) = f_X(x)f_Y(y)$。 2. 案例简介 轮船停泊问题 例 某码头能容纳一只船，预知某日有甲、乙两船将独立地来到该码头，且在 $24h$ 内各时刻来到的可能性都相等。如果它们需要停靠的时间分别为 $3h$ 和 $4h$，试求有一只船要在江中等待的概率。 解 设 X 表示甲船到达码头的的时间，Y 表示乙船到达码头的的时间。由题中条件，其均服从 $[0, 24]$ 上的均匀分布，即 X 的边缘密度

	函数为 $f_X(x) = \begin{cases} \frac{1}{24}, & 0 \leq x \leq 24, \\ 0, & \text{其他} \end{cases}$ Y 的边缘密度函数为 $f_Y(y) = \begin{cases} \frac{1}{24}, & 0 \leq y \leq 24, \\ 0, & \text{其他} \end{cases}$ X 与 Y 相互独立, 故 X 与 Y 的联合密度函数为 $f(x, y) = \begin{cases} \frac{1}{24^2}, & 0 \leq x \leq 24, 0 \leq y \leq 24, \\ 0, & \text{其他} \end{cases}$ 用事件 A 表示“有一只船在江中等待”, 则 $A = \{Y < X < Y+4\} \cup \{X < Y < X+3\}$ 用 G 表示 xOy 平面上相应于事件 A 的区域, 即 $G = \{(x, y) y < x < y+4, x < y < x+3\}$ 又令 $\Omega = \{(x, y) 0 \leq x \leq 24, 0 \leq y \leq 24\}$, 于是 $P(A) = P((X, Y) \in G) = \iint_G f(x, y) dx dy = \iint_{G \cap \Omega} \frac{1}{24^2} dx dy$ 由二重积分的几何意义, 易知上式最右边的积分为 $\frac{S(G \cap \Omega)}{24^2} = \frac{24^2 - \frac{1}{2} \times 21^2 - \frac{1}{2} \times 20^2}{24^2} \approx 0.27$ 其中, $S(G \cap \Omega)$ 表示区域 $G \cap \Omega$ 的面积, 因此有一船在江中等待的概率约为 0.27。 3. 思政融入 二维随机变量及其独立性反映了马克思主义哲学基本原理的“密切联系的客观特征、普遍性和多样化”及“共同点和个人的辩证关系”, 让学生了解不仅随机变量, 每个个人与集体之间的关系也是独立与联系的, 都是具有辩证性和历史性内涵的丰富概念。
分析评价	通过一个轮船停泊例子展示了二维随机变量的独立性, 同时揭示了马克思主义哲学中独立性与联系性的辩证关系。
评价者	程国教授, 商洛学院数学与计算机应用学院

案例编号	PTMS—033
案例标题	数学期望的定义——思辨能力
案例来源	原创
内容简介	在介绍期望时，告诉学生当我们在做决策时，我们可能会面临许多不确定的因素。这时，我们可以使用数学期望来量化这些不确定性，从而做出更好的决策。同时，我们也需要运用思辨的能力，对这些不确定性进行深入的理解和分析，以便更好地应对。
关键词	期望，思辨能力，不确定性
编写时间	2023-11-5
编著者	张东翰，教授，商洛学院数学与计算机应用学院
素材形式	文字
育人主题	数学的思辨能力
素材长度	581 字符
案例正文	1. 知识点：期望 期望的概念，反映了随机变量平均取值的大小。 定义 1 设离散型随机变量 X 的分布律为 $P\{X=x_k\}=p_k, k=1, 2, \dots,$ 若级数 $\sum_{k=1}^{\infty} x_k p_k$ 绝对收敛，则称级数 $\sum_{k=1}^{\infty} x_k p_k$ 为随机变量 X 的数学期望 (Mathematical expectation)，记为 $E(X)$。即 $E(X)=\sum_{k=1}^{\infty} x_k p_k \circ \quad (1)$ 设连续型随机变量 X 的概率密度为 $f(x)$，若积分 $\int_{-\infty}^{+\infty} xf(x)\mathrm{d}x$ 绝对收敛，则称积分 $\int_{-\infty}^{+\infty} xf(x)\mathrm{d}x$ 的值为随机变量 X 的数学期望，记为 $E(X)$。即

	$E(X)=\int_{-\infty}^{+\infty}xf(x)\mathrm{d}x \quad (2)$ 数学期望简称期望，又称为均值。 2. 案例简介 数学期望与思辨能力 数学期望与思辨能力之间存在一定的联系。数学期望作为概率论与数理统计中的基本概念，它涉及到对随机现象的深刻理解和分析。而思辨能力则是指个体在面对问题时进行思考、分析、推理和判断的能力，它是数学学习乃至其他学科学习中不可或缺的一种智力活动。 3、思政融入 在教学过程中，教师应当关注学生对数学期望的理解程度，并通过讨论、研究案例、解决实际问题等促进学生的思辨能力。告诉学生当我们在做决策时，我们可能会面临许多不确定的因素。这时，我们可以使用数学期望来量化这些不确定性，从而做出更好的决策。同时，我们也需要运用思辨的能力，对这些不确定性进行深入的理解和分析，以便更好地应对。数学期望和思辨的能力都是我们在面对不确定性时的重要工具，它们可以帮助我们更好地理解 and 应对这个世界。
分析评价	本案例在介绍数学期望让学生学会将数学期望等理论知识应用于实际问题中，数学期望的学习不仅仅是对一个数学概念的理解，更是一种思辨能力的培养。通过深入探讨数学期望的概念和应用，学生可以发展自己的思辨能力，这对于他们未来的学习和生活都是非常有益的。
评价者	赵鹏军教授，商洛学院数学与计算机应用学院

案例编号	PTMS—034
案例标题	数学期望的应用——核酸分组检测问题
案例来源	原创
内容简介	引入核酸混检案例，引导学生学好专业课的同时，主动思考这些案例下所蕴含的思想价值信念，体会“科学防治，精准施策”在防疫中的重要作用，培养学生良好的数学核心素养和数学思维能力，做到崇尚科学，学会从科学的角度认识问题、分析问题和解决问题。
关键词	数学期望，崇尚科学，核酸混检案例
编写时间	2023-12-2
编著者	杨燕，副教授，商洛学院数学与计算机应用学院 张东翰，教授，商洛学院数学与计算机应用学院
素材形式	文字，图片
育人主题	永攀科学高峰、科技报国的家国情怀和使命担当。
素材长度	852 字符
案例正文	1. 知识点：数学期望的应用 期望的概念，反映了随机变量平均取值的大小。 定义 1 设离散型随机变量 X 的分布律为 $P\{X = x_k\} = p_k, k = 1, 2, \dots$ 若级数 $\sum_{k=1}^{\infty} x_k p_k$ 绝对收敛，则称级数 $\sum_{k=1}^{\infty} x_k p_k$ 为随机变量 X 的数学期望(Mathematical expectation)，记为 $E(X)$， 即 $E(X) = \sum_{k=1}^{+\infty} x_k p_k \quad (1)$ 否则称 X 的数学期望不存在。 定义 2 设连续型随机变量 X 的概率密度为 $f(x)$，若广义积分 $\int_{-\infty}^{+\infty} xf(x)dx$ 绝对收敛，则称积分 $\int_{-\infty}^{+\infty} xf(x)dx$ 的值为随机变量 X 的数

学期望，记为 $E(X)$ 。即

$$E(X) = \int_{-\infty}^{+\infty} xf(x)dx \quad (2)$$

否则称 X 的数学期望不存在。数学期望简称期望，又称为均值。

2. 案例简介

核酸分组检测问题

某小区共有 2000 人参加核酸检测，已知每人呈阳性的概率为 0.001，现在采用两种方案进行采样检测(图 34-1)：

方案 1：单人单检，即逐一进行检测；

方案 2：分组检测，每 5 人为一组进行混合检测，如果检测结果为阴性则一次通过，如果为阳性，则再逐一检测；

请问哪一种方案最优？



方案 1：单人单检



方案 2：分组检测

图 34-1

解 比较两种方案的检测次数：

采用第 1 种方案，检测次数为 2000 次；

采用第 2 种方案 5 人一组分组检测时，设随机变量 X 为一组所需的检测次数，则 X 的分布律为

X	1	6
p_k	0.9995	1-0.9995

则每组需要的平均检测次数为

$$E(X_i) = E(X) = 1.025 \quad i = 1, 2, \dots, 400$$

$$E(X) = 1 \times 0.999^5 + 6 \times (1 - 0.999^5) \approx 1.025$$

	方案 2 中共分为 400 组，总的检测次数 $Y=X_1+X_2+\dots+X_{400}$，其中 X_i 与 X 同分布， $E(X_i)=E(X)=1.025. \quad i=1,2,\dots,400$ $E(Y)=E(X_1+X_2+\dots+X_{400})=400\times 1.025=410 \ll 2000$ 因此，方案 2 比方案 1 更高效，即分组检测比单人单检更优。 3、思政融入 从概率的角度出发，利用数学期望解决提出的新冠病毒检测中的核酸混检问题，让学生了解核酸检测中多人混检的原理和优点。采用核酸多人混检技术可以在短时间内完成大规模的核酸检测，不仅提高了检测效率，也为国家节约了物力和财力。点赞中国力量，中国速度，中国智慧，致敬疫情中无私奉献的医务工作者(图 34-2)。给学生强调抗疫中“科学防治，精准施策”的重要性，激发学生努力学习，崇尚科学，科技报国的家国情怀。引导学生树立正确的价值观，引导学生正确做人做事做学问，助力学生的全面发展。 图 34-2
分析评价	通过本案例的实施，激发了学生努力学习，崇尚科学，科技报国的家国情怀。引导学生树立正确的价值观，引导学生正确做人做事做学问，助力学生的全面发展。
评价者	赵鹏军教授，商洛学院数学与计算机应用学院

案例编号	PTMS—035
案例标题	方差——我国脱贫攻坚政策
案例来源	原创
内容简介	在学习方差的概念时，引导学生利用方差的有关知识分析解读脱贫攻坚政策，使学生更好地理解国家的大政方针政策，感受我国社会主义制度的优越性，增强四个自信。
关键词	方差，脱贫攻坚政策，四个自信
编写时间	2024-1-20
编著者	杨燕，副教授，商洛学院数学与计算机应用学院
素材形式	文字，图片
育人主题	感受我国社会主义制度的优越性，增强四个自信
素材长度	1087 字符
案例正文	1. 知识点：方差 方差用于衡量一组数据的离散程度。 定义 1 设 X 是一个随机变量，若 $E[X - E(X)]^2$ 存在，则称 $E[X - E(X)]^2$ 为 X 的方差（Variance），记为 $D(X)$，即 $D(X) = E[X - E(X)]^2 \quad (1)$ 称 $\sqrt{D(X)}$ 为随机变量 X 的标准差（Standard deviation）或均方差（Mean square deviation），记为 $\sigma(X)$。 若离散型随机变量 X 的分布律为 $P\{X = x_k\} = p_k, (k = 1, 2, \dots)$， 则 $D(X) = \sum_{k=1}^{\infty} [x_k - E(X)]^2 p_k. \quad (2)$ 若连续型随机变量 X 的概率密度为 $f(x)$，则 $D(X) = \int_{-\infty}^{+\infty} [x - E(X)]^2 f(x) dx. \quad (3)$ 由此可见，方差 $D(X)$ 是一个常数，它由随机变量的分布惟一确定。 注释：

(1)方差 $D(X)$ 是一个常数，本质上体现 X 与“平均值”的偏离程度。

(2) $D(X)$ 越小，说明 X 取值越集中；反之， $D(X)$ 越大， X 取值越分散。

2. 案例简介

用方差分析解读我国脱贫攻坚政策

方差，作为统计学中的一个重要概念，通常用来衡量数据的离散程度。当我们尝试用方差的知识来解读脱贫攻坚政策时，可以将其看作是一系列针对贫困问题的措施和方案，这些措施和方案的目标是实现全面脱贫，减少贫困的离散程度，使得贫困地区和贫困人口能够更好地融入社会经济发展的大潮中。



图 35-1

具体来说，脱贫攻坚政策的核心目标是实现农村贫困人口的全全面脱贫，以及贫困地区的整体发展。这需要通过多种手段来实现，如发展生产、易地搬迁、生态补偿、发展教育和社会保障兜底等。这些手段的实施，旨在提高贫困地区的经济发展水平，改善贫困群众的生产生活条件，增加他们的收入来源，从而减少他们与其他地区、其他群体之间的经济差异，降低这种差异的离散程度。

此外，脱贫攻坚政策还注重因地制宜、因人施策，根据不同地区的实际情况和贫困群众的个体差异来制定具体的扶贫措施。这也

	是为了减少由于地域和个体差异导致的贫困程度的离散，使扶贫工作更加精准、有效。 总的来说，从方差的视角来看，脱贫攻坚政策就是一系列旨在降低贫困离散程度、促进全面小康建设的系统性工程。通过实施这些政策，我们可以期待看到一个更加公平、和谐的社会环境，其中贫困不再是阻碍人们发展的障碍，而是成为历史中的一段记忆。 3. 思政融入 方差反映随机变量取值与平均值的离散程度，在学习方差的概念时，选择“我国到 2020 年打赢脱贫攻坚战的目标”作为思政载体及时渗透思政教育：脱贫是为了消除贫困，减少贫富差距，提高平均生活水平，改善民生，逐步实现共同富裕，这里“贫富差距”就是方差概念的具体释义。这样，引导学生利用方差的有关知识分析解读脱贫攻坚政策，使学生更好地理解国家的大政方针政策，感受我国社会主义制度的优越性，增强四个自信。  图 35-2 四个自信
分析评价	本案例引导学生利用方差有关知识分析解读脱贫攻坚政策，使学生更好地理解国家的大政方针政策，感受我国社会主义制度的优越性，增强四个自信。
评价者	赵鹏军教授，商洛学院数学与计算机应用学院

案例编号	PTMS—036
案例标题	协方差——个人努力与团队协作的关系
案例来源	原创
内容简介	在介绍协方差内容时，引入个人与他人的关系，让学生做人做事，除了个人的努力外，还要加强人与人之间的团结合作，团队的努力所创造的成就远远大于个人努力取得的成就，从而对社会做出更大的贡献。
关键词	协方差，个人努力，团结合作
编写时间	2024-1-28
编著者	张东翰，教授，商洛学院数学与计算机应用学院
素材形式	文字，图片
育人主题	注重个人努力的同时，要加强人与人之间的团结协作。
素材长度	835 字符
案例正文	1. 知识点：协方差 协方差的概念描述了一对随机变量相互影响、相互联系的程度。 定义 1 设(X,Y)为二维随机变量，称 $E\{[X - E(X)][Y - E(Y)]\}$ 为随机变量X,Y的协方差（Covariance），记为$\text{Cov}(X,Y)$，即 $\text{Cov}(X,Y) = E\{[X - E(X)][Y - E(Y)]\}$ 而$\frac{\text{cov}(X,Y)}{\sqrt{D(X)}\sqrt{D(Y)}}$称为随机变量$X,Y$的相关系数(Correlation coefficient)或标准协方差(Standard covariance)，记为ρ_{XY}，即 $\rho_{XY} = \frac{\text{cov}(X,Y)}{\sqrt{D(X)}\sqrt{D(Y)}}$ 注 $\text{Cov}(X,X) = E\{[X - E(X)]^2\} = D(X)$ 方差是特殊的协方差。

2.案例简介

个人努力与团队协作是相辅相成的关系

首先，个人努力是团队协作的基础。一个团队由多个个体组成，如果每个个体都能尽自己的努力去完成自己的工作，那么整个团队的效率和效果都会得到提升。反之，如果团队成员都依赖他人，不愿意付出努力，那么团队的整体表现就会大打折扣。

其次，团队协作能够提升个人努力的效果。在团队中，成员可以通过协作，共享资源，互相学习，互相帮助，从而提升个人的工作效率和质量。同时，团队协作也能让个人在面对困难和挑战时，得到团队的支持和帮助，从而更好地克服困难，实现目标。

总的来说，个人努力和团队协作是相互依赖，相互促进的。个人努力是团队协作的基础，而团队协作又能提升个人努力的效果。

（图 36-1）



图 36-1

3. 思政融入

在介绍协方差内容时，引入个人与他人的关系，让学生做人做事，除了个人的努力外，还要加强人与人之间的团结合作。让学生明白个人努力与团队努力是相互依赖、相互促进的。个人的努力是团队成功的基石，而团队努力为个人提供了一个平台，使他们能够

	更有效地实现个人和共同的目标。理想的情况是，个人和团队之间形成一种正向循环，个人的努力促进了团队的成功，而团队的成功又增强了个人的动力和满足感。  图 36-2 让学生认识到团队的努力所创造的成就远远大于个人努力取得的成就，从而对社会做出更大的贡献（图 36-2）。
分析评价	本案例在介绍协方差内容时，引入个人与他人的关系，让学生做人做事，除了个人的努力外，还要加强人与人之间的团结合作，告诉学生要注重个人努力与团队努力的关系，这样对社会才能做出更大的贡献，思政育人不知不觉就已抵达学生内心深处。
评价者	赵鹏军教授，商洛学院数学与计算机应用学院

案例编号	PTMS—037
案例标题	切比雪夫不等式——著名数学家切比雪夫
案例来源	原创
内容简介	在学习切比雪夫不等式时，介绍了数学家切比雪夫的事迹，指出切比雪夫自小双腿残疾，一生未婚，长期坐着沉思，推动了概率论与数理统计的学科发展，给学生传递身残志坚、勤奋、坚毅的优秀品质。
关键词	切比雪夫不等式，数学家切比雪夫，身残志坚
编写时间	2023-12-25
编著者	张东翰，教授，商洛学院数学与计算机应用学院
素材形式	文字，图片
育人主题	身残志坚、勤奋坚毅的优秀品质
素材长度	1254 字符
案例正文	1. 知识点：切比雪夫（Chebyshev）不等式 切比雪夫不等式给出了在随机变量 X 的分布未知的情况下事件 $\{ X - E(X) < \varepsilon\}$ 的概率的下限估计。切比雪夫不等式作为一个理论工具，在大数定律证明中，可使证明非常简洁。 定理 1(切比雪夫 (Chebyshev) 不等式) 设随机变量 X 存在有限方差 $D(X)$，则有对任意 $\varepsilon > 0$， $P\{ X - E(X) \geq \varepsilon\} \leq \frac{D(X)}{\varepsilon^2} \quad (1)$ 切比雪夫不等式也可表示成 $P\{ X - E(X) < \varepsilon\} \geq 1 - \frac{D(X)}{\varepsilon^2} \quad (2)$ (1)和(2)称为切比雪夫不等式。 2. 案例简介 著名数学家切比雪夫的故事 切比雪夫（图 37-1）是一位杰出的俄罗斯数学家、力学家，他

的一生充满了对数学的热爱和贡献。切比雪夫通过自己的努力，在数学领域取得了显著的成就，同时也为后世留下了宝贵的遗产。

(1)生平背景

切比雪夫出生于 1821 年 5 月 26 日的卡卢加省奥卡托沃，一个贵族家庭之中，1894 年 12 月 8 日卒于彼得堡。尽管他生来左脚有残疾，但这并未阻止他成为一位伟大的数学家。相反，这可能促使他在童年时期养成了独处思考的习惯，从而培养了独立思考的能力。切比雪夫的家庭教育非常优越，父母为他和他的兄弟姐妹们请了当时最有名的家庭教师波戈列日斯基，这对他后来的教育起到了重要的促进作用。1837 年，切比雪夫进入莫斯科大学学习物理和数学专业，并最终在 1847 年完成了学位论文，证明了贝尔特兰公式，这是其学术生涯的开始。



图 37-1 切比雪夫(1821-1894)

(2)科学成就

切比雪夫在概率论和数论领域取得了重大进展，他不仅证明了贝尔特兰公式，还研究了自然数列中素数的分布定理，拓展了大数定律的一般公式及中心极限定理，这些成就对后世数学理论的发展产生了深远影响。切比雪夫不仅关注理论数学，也非常重视数学的实际应用。他解决了直动机构的数学计算问题，发明了多种机械，包括能精确模拟动物行走的步行机，显示了数学在工程技术中的重

	要作用。 (3)教育影响 切比雪夫不仅是一位研究者，也是一位杰出的教育者。他在彼得堡大学数学系任教多年，培养了大量的数学人才，开创了彼得堡数学学派，使得俄罗斯的数学理论水平赶上了欧洲数学强国。尽管取得了巨大的学术成就，切比雪夫仍保持生活简朴、为人谦虚的品格。他乐于与年轻人探讨数学问题，不吝赐教，深受学生们的爱戴和尊敬。 (4)社会影响 切比雪夫是 19 世纪下半叶俄国数学理论界的领军人物，他的工作不仅促进了数学理论的发展，还推动了数学在工程学和物理学中的应用，为俄国的工业发展做出了突出贡献。切比雪夫的故事和成就至今仍然激励着一代代的数学爱好者和专业人士，坚持梦想，刻苦钻研，不断探索数学的奥秘。 3. 思政融入 切比雪夫的一生证明了，即使在面对个人困难和身体限制的情况下，通过勤奋和执着的追求，也能在科学的天地里留下不可磨灭的印记。他的故事不仅仅是关于数学的历史，更是一个关于坚持、创新和教育的故事，为所有热爱数学和科学的人提供了宝贵的启示和灵感。 在讲授切比雪夫不等式时，用切比雪夫身残志坚的故事教育学生，在大学时代这个美好的青春岁月，在拥有健康的体魄下，每个人应该更加努力，在自己的学业上取得优异的成绩，时刻准备着为国家和民族做出自己的贡献。
分析评价	切比雪夫的故事是关于如何通过勤奋和才能，在面对个人困难时仍然能够取得巨大成就的典范。通过介绍他的事迹，可以给学生提供宝贵的启示：即使在资源匮乏或环境不利的情况下，也能通过坚持和创新，达到科学的高峰。
评价者	赵鹏军教授，商洛学院数学与计算机应用学院

案例编号	PTMS—038
案例标题	伯努利大数定律——“不积跬步，无以至千里；不积小流，无以成江海”
案例来源	原创
内容简介	在介绍伯努利大数定律时，告诉学生伯努利大数定律表明，当试验在相同条件下重复进行的次数很多时，成功的频率稳定在每次成功概率的附近。通过此问题讲解，进而引用名言：“不积跬步，无以至千里；不积小流，无以成江海。”教育学生每个人的生活都是一件件小事组成的，只有先做好小事才能完成大事，先养小德才能成就大德。
关键词	伯努利大数定律；跬步至千里；小流成江海
编写时间	2024-3-2
编著者	张东翰，教授，商洛学院数学与计算机应用学院
素材形式	文字，图片
育人主题	名言：“不积跬步，无以至千里；不积小流，无以成江海。”中蕴含的深刻道理：只有先做好小事才能完成大事，只有先养小德才能成就大德。
素材长度	1265 字符
案例正文	1.知识点：伯努利大数定律 伯努利大数定律是概率论中的一个重要定律，它描述了在大量重复试验中，某一事件发生的频率趋于一个稳定的概率值。伯努利大数定律是历史上第一次以严格的形式刻画了频率的稳定性，同时也给了我们用频率去近似概率的理论依据。 定理 1（伯努利（Bernoulli）大数定律）设 n_A 是 n 次独立重复试验中事件 A 发生的次数，p 是事件 A 在每次试验中发生的概率，则对于任意正数 $\varepsilon > 0$，有 $\lim_{n \rightarrow \infty} P\left\{\left \frac{n_A}{n} - p\right < \varepsilon\right\} = 1,$

或

$$\lim_{n \rightarrow \infty} P\left\{\left|\frac{n_A}{n} - p\right| \geq \varepsilon\right\} = 0.$$

这个定律表明，当试验次数 n 逐渐增大时，事件 A 发生的频率（即 $\frac{n_A}{n}$ ）将几乎肯定地趋于其概率 p 。

伯努利大数定律的意义在于，它揭示了随机现象背后的规律性。在实际应用中，我们可以通过大量的重复试验来估计某个事件发生的概率，当试验次数足够多时，这个估计值将非常接近真实概率。这一思想在统计学、概率论、机器学习等领域都有广泛的应用。

需要注意的是，伯努利大数定律成立的前提是试验是独立重复的，并且每次试验中事件 A 发生的概率 p 保持不变。如果这两个条件不满足，那么伯努利大数定律可能不成立。

2.案例简介

“不积跬步，无以至千里；不积小流，无以成江海。”



图 38-1

这句话出自先秦荀子的《劝学》，其核心意义在于强调积累的重要性和持之以恒的精神。“不积跬步，无以至千里”意在说明没有小步的累积，就无法达到远距离的目标。同样，“不积小流，无以成江海”则表达了没有细小水流的汇聚，便无法形成宽广的江河和海洋。这些话语鼓励人们认识到无论是学习还是其他方面的努力，都需要从小事做起，从基础做起，通过不断的积累和努力，最终才能取得显著的成就。

	这句话深刻的阐释了积累的重要性：知识和能力的提升不是一蹴而就的，而是需要不断积累的过程。每一次的学习、每一次的实践都是向目标迈进的一步。只有通过持续的积累，才能在长远的时间里看到成果。 荀子在这里还提到了“骐骥一跃，不能十步；弩马十驾，功在不舍”，意在说即使是能力出众的骏马也无法仅凭一次跳跃就达到很远的距离，而平凡的马匹若能坚持不懈地前进，也能成功到达目的地。这说明了坚持的重要性，即使条件一般，只要不放弃，就能够取得成功。 3、思政融入 在介绍伯努利大数定律时，告诉伯努利大数定律表明，当试验在相同条件下重复进行的次数很多时，成功的频率稳定在每次成功概率的附近。通过此问题讲解，进而引用名言：“不积跬步，无以至千里；不积小流，无以成江海。”教育学生每个人的生活都是一件件小事组成的，只有先做好小事才能完成大事，先养小德才能成就大德。通过中国古代名人名句，培养学生的人文素养，建立正确的人生观和价值观，养成坚持不懈、持之以恒的品质。 同时，教师可以结合社会上的一些案例进行分析。对社会存在一些没有上大学但成就较高的事例，教师引导学生得出上大学成才率更高的一般规律，来说明学习伯努利大数定律的重要意义，激发学生的学习热情，端正学风。
分析评价	通过讲授伯努利大数定律，引入“不积跬步，无以至千里；不积小流，无以成江海”这句话，向学生传达一个深刻的道理，即无论是学习还是其他任何事业，都需要注重积累和坚持，这是通往成功必不可少的路径。
评价者	赵鹏军教授，商洛学院数学与计算机应用学院

案例编号	PTMS—039
案例标题	辛钦大数定律——著名数学家辛钦
案例来源	原创
内容简介	在介绍辛钦大数定律时，告诉学生辛钦大数定律的命名是根据著名数学家辛钦的名字而得来的，用于纪念其在概率论多个领域的开创性工作。通过讲解数学家故事让学生领悟到数学的意义和美妙之处。
关键词	辛钦大数定律，著名数学家辛钦
编写时间	2024-3-20
编著者	张东翰，教授，商洛学院数学与计算机应用学院
素材形式	文字，图片
育人主题	勤奋执着、勇于创新的优秀品质
素材长度	1360 字符
案例正文	1. 知识点：辛钦利大数定律 定理 1 (辛钦 (Khinchin) 大数定律) 设随机变量 $X_1, X_2, \dots, X_n, \dots$ 相互独立，服从同一分布，且具有数学期望 $E(X_k) = \mu$ ($k = 1, 2, \dots$)，则对于任意正数 ε，有 $\lim_{n \rightarrow \infty} P \left\{ \left \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n X_k - \mu \right < \varepsilon \right\} = 1$ 辛钦大数定律表明，当重复对一个随机变量进行大数次观察时，在 n 次观察中的算术平均值会稳定于它的期望值，这就为寻找随机变量的期望值提供了一种思路。在实际生活中，许多案例都以辛钦大数定律作为其理论背景。 2. 案例简介 著名数学家辛钦的故事 亚历山大·雅科夫列维奇·辛钦（图 39-1）是一位杰出的苏联数学家和数学教育家，现代概率论的奠基者之一。他的故事是数学史上的一个重要篇章，充满了对数学的深刻洞察和对教育的执着追

求。辛钦的生平、成就和贡献构成了一个丰富多彩的数学世界。



图 39-1 辛钦(1894-1959)

辛钦于 1894 年 7 月 19 日出生于莫斯科康德罗沃，他的童年和少年时期正值俄罗斯社会动荡和科学发展的时期。1916 年，辛钦毕业于莫斯科大学，这是他数学生涯的起点。在莫斯科大学期间，辛钦接受了扎实的数学训练，并开始展现出他在数学领域的才华。毕业后，辛钦留校从事教学工作，先后在莫斯科大学和苏联科学院斯捷克洛夫数学研究所等处工作，致力于培养新一代的数学家。辛钦在分析学、数论、概率论及统计学力学的应用等方面取得了重要成果。他是莫斯科概率论学派的创始人之一，对概率论的发展做出了巨大贡献。1935 年，辛钦获得物理数学博士学位。1939 年，他被选为苏联科学院通讯院士，1944 年当选为俄罗斯教育科学院院士，这些荣誉反映了他在学术界的高度认可。

主要学术贡献

概率论：辛钦在概率论领域有着深远的影响。他提出了平稳随机过程理论，证明了严格平稳过程的遍历定理，并首次给出了宽平稳过程的概念及其谱理论基础。他还研究了概率极限理论与统计力学基础的关系，并将概率论方法广泛应用于统计物理学的研究。

分析学：在分析学中，辛钦引进了渐近导数的概念，推广了当儒瓦积分，建立了辛钦积分，研究了可测函数的结构，并将函数的度量理论应用于数论和概率论中。

	数论：在数论领域，辛钦的成就主要体现在丢番图逼近论和连分数的度量理论方面，他建立了一系列新的原理。 辛钦共发表了 150 多篇数学及数学史论著。在数学中以他的姓氏命名的有辛钦定理、辛钦不等式、辛钦积分、辛钦条件、辛钦可积函数、辛钦转换原理、辛钦单峰性准则等等。这些成果不仅丰富了数学的理论体系，也为后来的研究者提供了宝贵的工具和方法。 辛钦十分重视数学教育和人才的培养，他编著了多本思路清晰、引人入胜、突出论题本质风格的教材和专著。《数学分析简明教程》和《数学分析八讲》等作品已成为数学领域的经典之作，影响了一代又一代的数学家和工程师。辛钦曾获得前苏联国家奖金，并多次获列宁勋章、劳动红旗勋章、荣誉勋章等奖章，这些荣誉充分体现了他对苏联乃至世界科学的贡献。 3. 思政融入 辛钦的故事不仅仅是一位数学家的个人历程，更是一段数学史上的重要篇章。他的工作不仅深化了人们对概率论的理解，也为后世的数学研究提供了宝贵的理论基础和方法论。在讲授辛钦大数定律时引入卓越数学教育家辛钦的故事，让学生学习他勤奋执着的工作态度和勇于探索未知领域，不断挑战传统理论的创新精神。用辛钦的故事激励每一位学生，不要停止对数学的热爱和追求，数学不仅是一门科学，更是一种艺术，它需要人们用一生的时间去探索和欣赏。
分析评价	辛钦的故事是一个充满智慧和毅力的故事。他的生平、成就和贡献不仅是数学史上的重要篇章，也是人类知识宝库中的宝贵财富。通过深入了解辛钦的故事，学生能够更好地认识到数学的魅力和价值，以及那些为数学发展做出杰出贡献的科学家们的伟大精神。
评价者	赵鹏军教授，商洛学院数学与计算机应用学院

案例编号	PTMS—040
案例标题	中心极限定理——量变和质变的关系
案例来源	原创
内容简介	在讲解中心极限定理的时候，让学生了解中心极限定理体现了量变和质变是事物发展的两种状态。量变是质变的必要准备，质变是量变的必然结果。量变是一种渐进的，不显著的变化，不影响事物的相对稳定性，不改变事物的本质。质变则是渐进过程的中断，是事物从一种质态向另一种质态的飞跃。
关键词	中心极限定理，量变，质变
编写时间	2024-4-5
编著者	张东翰，教授，商洛学院数学与计算机应用学院
素材形式	文字，图片
育人主题	不要急功近利，不必追求立竿见影，耐心才能成就自己
素材长度	986 字符
案例正文	1. 知识点：中心极限定理 中心极限定理体现了概率的统计规律性。 定理 1（独立同分布的中心极限定理） 设随机变量 $X_1, X_2, \dots, X_n, \dots$ 相互独立，服从同一分布，且具有数学期望和方差 $E(X_k) = \mu, D(X_k) = \sigma^2 \neq 0, (k=1, 2, \dots)$，则随机变量 $Y_n = \frac{\sum_{k=1}^n X_k - E\left(\sum_{k=1}^n X_k\right)}{\sqrt{D\left(\sum_{k=1}^n X_k\right)}} = \frac{\sum_{k=1}^n X_k - n\mu}{\sqrt{n}\sigma}$ 的分布函数 $F_n(x)$ 对于任意 x 满足 $\lim_{n \rightarrow \infty} F_n(x) = \lim_{n \rightarrow \infty} P\left\{\frac{\sum_{k=1}^n X_k - n\mu}{\sqrt{n}\sigma} \leq x\right\} = \int_{-\infty}^x \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{t^2}{2}} dt.$ 2. 案例简介

量变和质变的关系：量变是质变的必要准备，质变是量变的必然结果。

量变和质变是事物发展变化的两个基本状态，它们之间的关系是辩证统一的。量变通常指的是事物数量的增减或位置的变化，而质变是指事物性质的根本变化。量变是质变的必要准备，意味着没有量变的积累，就不可能发生质变。质变是量变的必然结果，当量变达到一定程度时，必然会引起质变（图 40-1）。



图 40-1

量变和质变不是孤立的，它们相互渗透、相互依存。在总的量变过程中可能包含部分质变，而在质变过程中也可能有量的扩张或收缩。度是特定事物的质和量的统一，是事物保持自己质的数量界限。一旦超出这个度，事物就会发生质变。

在实际工作中，应当坚持适度原则，不失时机地促成飞跃，重视量的积累，并在量变达到能够引起质变时要有敢于突破的勇气。理解量变质变规律的原理对于革命和建设工作的方法论具有重要意义，它揭示了事物发展过程是连续性和阶段性的统一，有助于正确处理社会主义改革、发展、稳定的关系。

3. 思政融入

中心极限定理体现了量变和质变是事物发展的两种状态。量变是质变的必要准备，质变是量变的必然结果。量变是一种渐进的，不显著的变化，不影响事物的相对稳定性，不改变事物的本质。质变则是渐进过程的中断，是事物从一种质态向另一种质态的飞跃。

	量变质变规律是马克思主义唯物辩证法三大基本规律之一，学习唯物辩证法，对于学生的成长都有着重要的指导意义。“不积跬步，无以至千里，不积小流，无以成江海”，个人的成长就是量变到质变的过程。每位同学都应该树立远大的目标，这一目标的实现就是个人成长中的质变。 在介绍中心极限定理时，讲解定理所体现的是量变和质变的关系，让学生更容易理解中心极限定理。同时让学生明白量变和质变之间的关系，告诉学生个人的成长就是量变到质变的过程，要努力学习，不断积累才是达到质变并获得成功。同时提醒学生注意质变的发生是以量变的积累为基础的，因此做任何事情，任何工作，不要急功近利，不必追求立竿见影，耐心才能成就自己(图 40-2)，只要每天能比前一天有一点突破，一点改善，而且朝着正确的目标持续做下去就会发生质变，实现既定目标。  图 40-2
分析评价	本案例在介绍中心极限定理时，讲解它所体现的量变和质变的关系，让学生更容易理解中心极限定理。同时让学生明白量变和质变之间的关系，使学生明白个人的成长就是量变到质变的过程，告诉学生努力学习，不断积累才是达到质变并获得成功。
评价者	赵鹏军教授，商洛学院数学与计算机应用学院

案例编号	PTMS—041
案例标题	统计学发展史——中国统计学领域的一代宗师许宝騄
案例来源	原创
内容简介	在介绍统计学发展史时，通过中外统计学发展史的比较，有利于学生总结历史经验，了解国情；通过介绍许宝騄优秀统计学家热爱祖国、兢兢业业工作的光荣事迹，培养学生的爱国主义情怀。
关 键 词	统计学发展史，许宝騄，爱国主义情怀
编写时间	2024-3-25
编 著 者	张东翰，教授，商洛学院数学与计算机应用学院 杨燕，副教授，商洛学院数学与计算机应用学院
素材形式	文字，图片
育人主题	热爱祖国，建设祖国的爱国情怀。
素材长度	2259 字符
案例正文	1.知识点：中外统计学发展史的比较 中国：中国的统计学可以追溯到古代的“结绳记事”和《二十四史》中的大量统计数据记录，如人口、钱粮、水文、天文、地震等资料的收集和整理。统计学教育在中国起步较晚，直到 20 世纪初，中国才开始系统地引入和学习西方的统计理论和方法。引入统计学课程，且主要限于一些高等学府。在 20 世纪初至解放之初，中国统计学主要在学习借鉴欧美的统计理论和方法，尚未形成自己完整的统计学理论体系。直到新中国成立后，特别是 1952 年国家统计局的成立，统计学在中国开始得到更广泛的应用和推广。 中国在改革开放后，随着国家经济的迅速发展，统计学在经济建设和社会发展中的作用越来越重要。同时，计算机和信息技术的普及也促进了统计学方法的应用和发展。中国统计学的国际化程度在逐步提高，通过国际交流与合作，不断吸收和引进国外先进的统计理论和方法，同时也在努力展示自身的研究成果。 西方：西方统计学的起源也相当早，但现代统计学的发展主要始于概率论的创立，尤其是在 16 世纪由于赌博游戏的需要，学者

们开始研究点数的频率和概率。这是早期概率论的萌芽，为后来的统计学奠定了基础。西方的统计学教育较早开始，尤其是 Pearson 在

19 世纪末就创建了世界上第一个统计系，为西方统计学教育的普及和发展奠定了基础。西方的统计学理论发展较为连续和系统，从早期的概率论到 17、18 世纪的数学家们对概率论的发展，如 Bayes 定理的提出，再到 Pearson 等人对现代（数理）统计学的建立，西方统计学理论逐渐形成了一个完整的科学体系。西方国家在技术和方法论的应用上具有较早的起步，如贝叶斯主义的兴起和计算机技术的应用，极大地推动了统计学方法的发展和创新。西方国家在统计学的国际合作和交流方面较为活跃，许多统计学的理论和方法都是在国际间的合作中不断发展和完善的，如国际统计会议的举办，国际统计标准的制定等。

综上所述，中外统计学在发展历程上各有特色，西方统计学在理论发展和教育普及上起步较早，而中国统计学则在近现代特别是新中国成立后迅速发展，逐步缩小与国际先进水平的差距。未来，中外统计学的发展应更加注重理论创新和方法应用的融合，推动统计学在全球范围内的进一步发展和应用。

2. 案例简介

中国统计学领域的一代宗师——许宝騄

许宝騄(图 41-1)，字闲若。1910 年出生于北京。1928 年考入燕京大学理学院。入大学后了解到清华大学数学系最好，决心转学



图 41-1 许宝騄（1910-1970）

	念数学。1929 年入清华大学数学系，仍从一年级读起。当时的老师有熊庆来、孙光远、杨武之等，一起学习的有华罗庚、柯召等人。1933 年毕业获理学士学位，经考试录取赴英留学，体检时发现体重太轻不合格，未能成行。1934 年任北京大学数学系助教，担任正在访问北京大学的美国哈佛大学教授奥斯古德的助教，前后共两年，奥斯古德在他后来出版的书中，提到了许宝騄的帮助。1936 年许宝騄再次考取了赴英留学，派往伦敦大学学院，在统计系学习数理统计，攻读博士学位。许宝騄在伦敦大学攻读博士期间，师从著名统计学家奈曼(Neyman)。此后的几年间，在统计推断和多元分析等方面做了一系列理论性开创性工作，把许多数学中的分支，如矩阵论、函数论、测度论等引进统计学，使统计学中许多问题的理论基础更加深厚，逐渐形成了统计学中的一个主流方向数理统计。1938 年他获得了哲学博士学位。同年，系主任内曼受聘去美国加州大学伯克利分校，他推荐将许宝騄提升为讲师，接替他在伦敦大学讲课。 他在英国伦敦大学留学时，当时国内条件远远落后于西方，对于许教授本身的发展而言，留在伦敦是更好的选择，但他心系国家，抗日战争爆发后，他决定回国，在 1940 年到昆明，在西南联合大学任教，培养了众多人才，钟开莱、王寿仁、徐利治等均是他的学生。当时工作条件极端艰苦，在这种环境下，在 1941 年到 1945 年，他在在顶级统计学期刊 <i>Biometrika</i>、伦敦数学期刊、数理统计年鉴上发表了十多篇开创性文章，成为国际上数理统计方向的奠基人之一。许宝騄教授也开创了概率论、数理统计在中国的教学与研究工作。 在 1945 年秋，他应邀去美国加州大学伯克利分校和哥伦比亚大学任访问教授，各讲一个学期，学生中有安德森，莱曼等人。1946 年到北卡罗莱纳大学任教。一年后，他决心回国，谢绝了一些大学的聘任，回到北京大学任教授。1948 年他当选为中央研究院院士。回国后不久就发现已患肺结核，他长期带病工作，教学科研一直未断，在矩阵论，概率论和数理统计方面发表了 10 余篇论文。1955
--	---

	年，他当选为中国科学院学部委员。1963 年组织屡次安排他休养，他均谢绝，并且一个人领导 3 个讨论班（平稳过程、马氏过程、数理统计），带领青年人搞科研。在 1970 年 12 月逝世时，他床边的小茶几上还放着一支钢笔和未完成的手稿。1980 年与 1990 年秋，北京大学两次举办纪念会，并出版了《许宝騄文集》。 3. 思政融入 在介绍统计学的发展史时，通过向学生介绍我国统计学领域的一代宗师暨先驱人物——许宝騄教授热爱祖国、兢兢业业工作的光荣事迹，以及他为中国的科学研究和教育事业，民族复兴、国家富强、科技进步做出的卓越贡献，特别是他海外学成后回国奉献，心系祖国，报效祖国的深厚爱国情怀，激发学生的学习兴趣，提升学生的民族自豪感，让学生认识到概率论与数理统计领域国内的著名学者及其成就。引导学生努力学习，认真钻研概率论与数理统计学科，激发学生为中华民族伟大复兴而努力读书、热爱祖国、建设祖国的爱国情怀（图 41-2）。 图 41-2
分析评价	本案例在介绍统计学发展史时，给同学们介绍优秀统计学家许宝騄为中国统计学的发展做出的巨大贡献的事迹。他们的研究和教育工作为学生树立了榜样，同时，也培养了学生的爱国主义情怀。
评价者	赵鹏军教授，商洛学院数学与计算机应用学院

案例编号	PTMS—042
案例标题	样本与总体——局部与总体的辩证关系
案例来源	原创
内容简介	在介绍样本与总体的概念时，引出局部与整体的辩证关系，局部与整体的辩证关系揭示了事物内部结构的复杂性和动态性。这种关系要求学生在认识和实践中的既要考虑到整体的目标和功能，也要注意局部的作用 and 影响。这要求学生既要有全局的观念，也要注重局部的实际情况，通过科学的方法和策略，实现整体与部分的和谐统一。进而让学生深刻体会到样本与总体的关系。
关键词	样本，总体，局部与整体的辩证关系
编写时间	2024-4-15
编著者	张东翰，教授，商洛学院数学与计算机应用学院
素材形式	文字，图片
育人主题	马克思主义哲学中局部与总体的辩证关系。
素材长度	1265 字符
案例正文	1. 知识点：总体与样本 定义 1 在数理统计中，我们将研究对象的某项数量指标值的全体称为总体（Population），总体中的每个元素称为个体(Individual)。一般地，我们都是从总体中抽取一部分个体进行观察，然后根据所得的数据来推断总体的性质。被抽出的部分个体，叫做总体的一个样本。 定义 2 设总体 X 是具有分布函数 F 的随机变量，若 $X_1, X_2, \dots, X_n$ 是与 X 具有同一分布 $F(x)$，且相互独立的随机变量，则称 $X_1, X_2, \dots, X_n$ 为从总体 X 得到的容量为 n 的简单随机样本（Random sample），简称为样本。 2. 案例简介 马克思主义哲学中局部与总体的辩证关系 马克思主义哲学中的局部与总体的辩证关系是指局部与整体

	之间的相互联系、相互作用和相互影响。这种关系体现在以下几个方面： 整体决定局部：在事物的发展过程中，整体起着主导作用，对局部具有决定性影响。整体的性质、规律和发展趋势决定了局部的性质、规律和发展方向。因此，研究问题时要从整体出发，把握事物的全局，才能更好地认识和解决局部问题。 局部反作用于整体：虽然整体对局部起着决定性作用，但局部也不是完全被动的。在一定条件下，局部的变化和发展可以影响到整体，甚至改变整体的性质和规律。因此，在解决问题时，要关注局部的特殊性和独立性，充分发挥局部的作用，以促进整体的发展。 局部与整体的相互依存：局部与整体是相互依存、相互制约的。没有局部就没有整体，没有整体也就没有局部。局部的发展受到整体的制约，同时整体的发展也离不开局部的支持。因此，在研究和解决问题时，要兼顾局部与整体的关系，既要看到它们之间的统一性，也要看到它们之间的矛盾和斗争。 局部与整体的转化：在一定条件下，局部与整体之间可以发生转化。一方面，局部可以发展成整体，例如，一个地区的经济发展可以带动整个国家的经济繁荣；另一方面，整体也可以分化为局部，例如，一个国家的政治体制可以分化为各个地区的地方政治体制。这种转化体现了事物发展的辩证法，要求我们在认识和处理问题时要发展的观点，看到事物的动态变化。 总之，马克思主义哲学中的局部与总体的辩证关系是一种动态的、相互依存的、相互制约的关系。在认识和处理问题时，要坚持辩证唯物主义的观点，从整体出发，把握事物的全局，同时关注局部的特殊性和独立性，发挥局部的作用，以促进整体的发展。 中国传统文化中对样本和总体关系的成语：一叶知秋。 3.思政融入 统计学是通过数据来认识世界的一门学科，在介绍样本与总体的概念时，引出局部与整体的辩证关系，局部与整体的辩证关系揭
--	---

	示了事物内部结构的复杂性和动态性。告诉学生在认识和实践中的既要考虑到整体的目标和功能，也要注意局部的作用和影响。这要求学生既要有全局的观念，也要注重局部的实际情况，通过科学的方法和策略，实现整体与部分的和谐统一。进而让学生深刻体会到样本与总体的关系。 在介绍样本与总体的关系时，可引入中国传统文化中的成语，比如“一叶知秋”（图 42-1），这个成语常用于形容人们通过观察微笑的变化来预测整体的发展趋势。让学生更容易理解样本与总体的关系。同时让学生体会到中国传统文化的魅力。  图 42-1
分析评价	本案例在介绍样本与总体的关系时，引入中国传统文化中的一些成语，让学生更容易理解样本与总体的关系。同时让学生体会到中国传统文化的魅力，在解释这些成语时又巧妙地引入了马克思主义哲学中“局部与整体的辩证关系”，使学生对样本与总体的关系更加深入地理解，同时，又培养了学生的思辨能力。
评价者	赵鹏军教授，商洛学院数学与计算机应用学院

案例编号	PTMS—043
案例标题	参数估计——许宝騄教授献身祖国、献身科学的事迹
案例来源	原创
内容简介	在刚接触到参数估计的内容时，介绍我国在这方面研究的先驱者——许宝騄教授，许教授在多个方面均取得了卓越成就，是世界公认的多元分析的奠基人之一。通过讲授许教授献身祖国、献身科学的事迹，渗透爱国主义教育，引领学生树立正确的价值观。
关键词	参数估计，爱国意识，人生导向
编写时间	2024-5-8
编著者	马春洁，助教，商洛学院数学与计算机应用学院
素材形式	文字、图片
育人主题	培养学生的爱国意识，引导学生树立正确的人生导向。
素材长度	883 字符
案例正文	1. 知识点：参数估计 参数估计是数理统计研究的主要问题之一。 在实际问题中，我们已知所研究的总体分布类型，但是分布中包含 1 个或多个未知参数。那么，如何让根据样本来估计未知参数，这就是所谓的参数估计。 2. 案例简介 许宝騄教授的爱国意识 许宝騄教授是世界公认的多元分析的奠基人之一，也是我国最早从事数理统计和概率论研究工作的先驱。许教授在参数估计理论、假设检验理论、多元分析等方面都取得了卓越成就，最先发现线性假设的似然比检验（F 检验）的优良性，给出了多元统计中若干重要分布的推导，推动了矩阵论在多元统计中的应用，发展了矩阵变换的技巧，对高斯-马尔可夫模型中方差的最优估计的研究取得重要成果，在多元分析、极限分布论、试验设计等方面做出了杰出的贡献。 1947 年他与罗宾斯合写的论文《完全收敛和大数定律》，引入

	完全收敛的概念；20 世纪 50 年代中期，首次用特征函数方法来近似处理两个高度相关的随机变量的分布，给出了样本方差的渐近展开和余项的估计；用纯分析的方法研究了跳过程转移概率函数的可微性。 他曾在英国伦敦大学学院留学并任教，但他心怀祖国，学有所成后，就决心回国效力。许教授在北大举办了国内第一个概率的讲习班，为我国培养了一批概率学科科研和教学的人才。 许宝騄教授逝世时享年仅 60。但是他留下了举世瞩目的学术成就，留下了为我国概率统计学科的建立和发展所开创的业绩，也留下了热爱祖国、献身科学的宝贵精神财富。 3. 思政融入 在进入参数估计这一章节的内容讲授时，特别介绍我国在这方面研究的先驱者——许宝騄教授。介绍许宝騄教授在参数估计理论、假设检验理论、多元分析等方面取得卓越成就（图 43-1）。 图 43-1 许宝騄和《抽样论》 通过讲述许教授献身祖国、献身科学的事迹，渗透爱国主义教育，引领学生树立正确的价值观。
分析评价	本案例在讲解参数估计的章节简介内容时，介绍我国统计学研究的先驱者许宝騄教授，通过讲授许教授献身祖国、献身科学的事迹，渗透爱国主义教育，引领学生树立正确的价值观。
评价者	赵鹏军教授，商洛学院数学与计算机应用学院

案例编号	PTMS—044
案例标题	矩估计法——电话交换台的人员配置问题
案例来源	原创
内容简介	在学习矩估计法的定义和相关内容中，讲解具体实例“某网电话交换台的人员配置问题”，在对该实际问题求解中，让学生体会到数学建模的思想和方法，增强学生的创新能力和应用数学知识解决问题的能力。在教与学的活动中，让学生体会理论与实际问题的差别，层层推进。既加深对理论的理解，同时也应用理论指导实践，以更好地解决实际问题。
关键词	矩估计法，数学建模，学以致用
编写时间	2024-4-15
编著者	马春洁，助教，商洛学院数学与计算机应用学院
素材形式	文字，表格
育人主题	理论联系实际，在解决实际问题的过程中，引导学生建立数学模型，提升学生的学习兴趣，培养学生的模型思维、发散思维、学以致用的意识。
素材长度	1126 字符
案例正文	1. 知识点：矩估计法 矩估计法是一种古老的估计方法。它是由英国统计学家皮尔逊于 1894 年首创的。它虽然古老，但目前仍常用。 定义 1 设总体 X 的分布函数为 $F(x, \theta)$，θ 是未知参数，$X_1, X_2, \dots, X_n$ 是 X 的一个样本，样本值为 $x_1, x_2, \dots, x_n$，构造一个统计量 $\hat{\theta}(X_1, X_2, \dots, X_n)$，用它的观察量 $\hat{\theta}(x_1, x_2, \dots, x_n)$ 作为 θ 的近似值，这种问题称为点估计问题。习惯上称随机变量 $\hat{\theta}(X_1, X_2, \dots, X_n)$ 为 θ 的估计量，称 $\hat{\theta}(x_1, x_2, \dots, x_n)$ 为 θ 的估计值。 定义 2 矩估计是用样本矩作为总体矩的估计方法。用矩估计确定的估计量称为矩估计量，相应的估计值称为矩估计值。矩估计量与矩估计值统称为矩估计。

2. 案例简介

电话交换台的人员配置问题

某网是国内知名的网络服务商，其业务涵盖酒店预订、机票预订、度假预订等。在某网的业务中，呼叫中心是其核心部门之一。呼叫中心的主要职能之一是接听客户的电话、接受客户的电话预约。那么请同学们思考：某网大约需要多少名接线员，使得接通率达到 95% 以上？接线员的数量与什么有关系呢？

模型假设

- (1) 设每 10 分钟内（单位时间）呼入次数为 x ，其呼入次数的频率为 n ；
- (2) 数据收集期间没有极端的节假日影响；
- (3) 设单位时间内，某网电话交换台收到的呼叫次数 $X \sim P(\lambda)$ 。

数据收集

我们搜集整理了某网接近一个月的电话呼入的数据，整理如下：

表 44-1 电话交换台收到的呼入次数和呼入次数的频数统计

呼入次数 x	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
频率 n	1	1	1	2	5	8	9	8	42	282
呼入次数 x	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19
频率 n	704	882	527	340	188	91	39	10	5	3

- (1) 请给出未知参数 λ 的矩估计量和矩估计值；
- (2) 某网大约需要多少名接线员，使得接通率达到 95% 以上？

模型建立与求解

- (1) 单位时间内，某网电话交换台收到的呼叫次数 $X \sim P(\lambda)$ 。

总体的一阶原点矩： $E(X) = \lambda$ ；

样本的一阶原点矩： $\bar{X} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n X_i$ ；

	由矩估计思想，令 $\lambda = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n X_i$，求得 λ 的矩估计量为 $\hat{\lambda} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n X_i$；$\lambda$ 的矩估计量为 $\hat{\lambda} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n X_i \approx 12$。 (2) 由上可知：$X \sim P(12)$，设接线员的数量为 N，对于某网而言要达到 95% 的接通率的数学表达为： $P(X \leq N) \geq 0.95$ 借助 Matlab 软件求解，$\text{poissinv}(0.95, 12)=18$，进而可知保障 95% 以上打入电话都可以接通的条件下，呼叫中心的人员配置数量至少应为 18 以上。 3. 思政融入 在学习矩估计法这一节的内容时，联系实际问题的，一方面激发学生的学习兴趣，一方面培养学生的数学思维，和建立数学模型求解实际问题的数学素养。 概率论与数理统计体现了科学发展的先进成果，具有丰富的思想内涵，同时也是本科教育阶段数学类课程中与实际问题联系较为直接的学科，正如科学巨匠拉普拉斯所说：“生活中最重要的问题，其中绝大多数实质上只是概率问题”。 概率论与数理统计课程内容大多源于生活，课程中的许多概念和理论也可以用来解决实际问题。借助生活实例可以提高学生的学习兴趣；通过案例的分析过程，可以培养学生的概率思维能力；运用模型也可以培养学生学以致用意识。
分析评价	本案例在讲授矩估计法的过程中设计了一个生活实例(某网电话交换台的人员配置问题),在对该实际问题求解中,通过模型假设、数据收集、模型建立、模型求解、计算机模拟的过程让学生体会到数学建模的思想和方法,增强学生的创新能力和应用数学知识解决问题的能力。
评价者	赵鹏军教授，商洛学院数学与计算机应用学院

案例编号	PTMS—045
案例标题	极大似然估计法思想——杨倩勇夺奥运金牌
案例来源	原创
内容简介	在介绍最大似然估计法时，通过杨倩获得金牌的经历激发学生的爱国情怀，并提出问题“我”与杨倩比赛射击谁赢的概率大引入此估计方法。激发学生不畏困难，为国争光的爱国情怀。
关键词	最大似然估计法，爱国情怀，克服困难
编写时间	2024-5-12
编著者	马春洁，助教，商洛学院数学与计算机应用学院
素材形式	文字、图片
育人主题	不畏困难，为国争光的爱国情怀。
素材长度	1196 字符
案例正文	1. 知识点：极大似然估计 极大似然估计的概念，观测数据出现概率最大的参数值来进行估计。 定义 1 假设我们有一个概率分布模型，其中的参数 θ 是未知的，我们的目标就是通过观测到的数据 X 来估计 θ 的值。为了做到这一点，我们首先需要定义似然函数 $L(\theta; X)$，它是给定参数 θ 时观测数据 X 的概率。然后，我们寻找参数 θ 的值，使得似然函数 $L(\theta; X)$ 达到最大，这个值就称为最大似然估计 MLE。 2. 案例简介 杨倩勇夺奥运金牌 2021 年 7 月 24 日进行的东京奥运会女子 10 米气步枪比赛中，中国“00 后”选手杨倩扛住了压力，以决赛 251.8 环的成绩夺得冠军，拼下了东京奥运会首枚金牌（图 45-1）。 杨倩，2000 年出生，父母都是普通的人，没有任何射击爱好与经历。 2010 年，省射击队选苗子。当时的浙江省射击队教练虞利华，亲自来到了杨倩就读的小学——宁波鄞州区姜山镇茅山小学。大众式

	目测，10 岁的杨倩毫不犹豫地站起来的一瞬间，就给虞利华留下了深刻印象。接着虞利华对杨倩进行了基本的体能测试。包括“闭眼燕式平衡”，“稳定性临空单手垒弹壳”等。5.6 毫米直径弹壳，她一只手拿一块板，一只手往上叠，叠了 7 个，非常稳，旁若无人一样，她的手一点也不抖……令人惊叹！ 起初，杨倩的父母是不同意杨倩去当射击运动员的。理由：一个女孩子，跑那么远，射击又能干什么呢？虞利华不慌不忙，给其父母介绍射击的相关知识，并让其自己去查找一些射击运动员的常识，才同意让杨倩去试试。就这样，11 岁的杨倩，进入了宁波少年体校开始了射击之路。 11 岁的孩子，还是天真活泼，任意玩耍的时期，可是，杨倩却要锻炼非凡的意志，忍受一些成人都难以忍受的痛苦。 学习射击，举枪，首先要稳定，纹丝不动，才能打出好成绩。都说孩子小，具有很强的可塑性，可是不吃苦，怎么“可塑”？ 在训练之中，小小的杨倩吃过多少苦？ 卧姿，一卧下去，就是一个多小时，肌肉都要僵硬了； 趴姿，还要举着枪，更不能动，全神贯注； 跪姿，跪下去，一直跪到两腿麻木，站不起来了…… 天才都是 1%的灵性+99%的汗水！没有 1%的灵性，再多的汗水也是徒劳；只有 1%的灵性，没有 99%的汗水，灵性也将消失得无影无踪。 一个十一二岁的孩子运动员级别的训练有多苦？ 2012 年全国青少年射击锦标赛备战训练，小小的杨倩竟然在练跪射时，跪着跪着就睡着了，旁边的人喊都喊不醒。你可以想象一下，她们训练的强度有多大，有辛苦！ 2017 年，杨倩顺利通过了普通高考，进入了清华大学高水平运动队，就读于清华经济管理学院。千万别以为，射击运动员的杨倩只会射击，她也和普通的清华学子一样，要学习专业知识，修满 180 个学分。
--	---

	射击非常枯燥，有了大学丰富的生活调节，相得益彰，能更好地促进杨倩射击技能的提升。杨倩还爱好手工、画画，她沉稳而又不失活泼，心细而又有极强的自我管控能力，同学们的眼中，她近乎“神”一般的存在！ 2019 年，杨倩以清华大学学生运动员身份参加第二届青年运动会，取得了 1 金 1 铜 1 银的好成绩，成功敲开了国家射击队的大门。 2021 年 7 月年仅 21 岁，首次参加奥运会，杨倩扛住了压力，以决赛 251.8 环的成绩夺得冠军，拼下了东京奥运会首枚金牌，为国家争得荣誉（图 45-1）。 图 45-1 杨倩夺冠 3. 思政融入 在介绍极大似然估计法的思想时，引入杨倩勇夺奥运金牌的故事。杨倩与学生年龄相仿，通过杨倩奥运夺金的例子可以激发学生的爱国情怀，提升学生的民族自豪感。同时，提出问题：如果我和杨倩一起射击，一人射中十环，一人脱靶，你认为谁更可能脱靶？通过这个问题可以引入极大似然估计的思想：在一次试验中，概率大的事件更可能发生。让学生从实际的例子中学习了知识，感受运动员不畏困难，为国争光的家国情怀。
分析评价	在介绍最大似然估计法时，通过杨倩获得金牌的经历激发学生的爱国情怀，并提出问题“我”与杨倩比赛射击谁赢的概率大引入此估计方法。激发学生不畏困难，为国争光的爱国情怀。
评价者	赵鹏军教授，商洛学院数学与计算机应用学院

案例编号	PTMS—046
案例标题	极大似然估计法——苹果分装问题
案例来源	原创
内容简介	在介绍极大似然估计法时，似然函数取最大值的参数值就是极大似然估计值，引导学生理解数学各分支各方法之间存在普遍联系性，培养学生的举一反三和综合应用的能力。
关键词	极大似然估计法，苹果分装问题
编写时间	2024-4-21
编著者	马春洁，助教，商洛学院数学与计算机应用学院
素材形式	文字
育人主题	数学各分支，各方法之间具有普遍联系性。
素材长度	802 字符
案例正文	1. 知识点：未知参数的极大似然估计法 设总体 X 的分布函数为 $F(x, \theta)$，θ 是未知参数，$X_1, X_2, \dots, X_n$ 是 X 的一个样本，样本值为 $x_1, x_2, \dots, x_n$，构造一个统计量 $\hat{\theta}(X_1, X_2, \dots, X_n)$，用它的观察量 $\hat{\theta}(x_1, x_2, \dots, x_n)$ 作为 θ 的近似值，这种问题称为点估计问题。习惯上称随机变量 $\hat{\theta}(X_1, X_2, \dots, X_n)$ 为 θ 的估计量，称 $\hat{\theta}(x_1, x_2, \dots, x_n)$ 为 θ 的估计值。 设总体 X，其概率密度函数（连续型随机变量）或分布律（离散型随机变量）为 $F(x; \theta)$，θ 为待估参数，$X_1, X_2, \dots, X_n$ 为一组样本，$x_1, x_2, \dots, x_n$ 是其样本观测值，定义似然函数为 $L(x; \theta) = L(x_1, x_2, \dots, x_n; \theta) = \prod_{i=1}^n f(x_i; \theta)$ 选取使得 $L(\theta)$ 取得最大值的 $\hat{\theta}$ 作为未知参数 θ 的估计值。 2. 案例简介 苹果分装问题 某果农在分装苹果时，如果大果和小果的比例为 4：1，则称其为一等品，若大果和小果的比例为 1：4，则称其为二等品。现有一箱苹果，不知道其等级，有放回的抽取四次，其结果为：第一次取

	到大果，后面四次都取到小果，试用极大似然原理判别一下这箱苹果是一等品还是二等品？ 解：设取到小果的概率为 p, $X_i = \begin{cases} 1 & \text{第} i \text{次取到小果} \\ 0 & \text{第} i \text{次取到大果} \end{cases} \quad i = 1, 2, 3, 4, 5$ $f(x; p) = p^x(1 - p)^{1-x}, x = 0, 1$ 则似然函数 $L(x; p) = L(x_1, x_2, \dots, x_5; \theta) = \prod_{i=1}^5 f(x_i; \theta) = p^{\sum_{i=1}^5 x_i} (1 - p)^{5 - \sum_{i=1}^5 x_i}$ 其中五次试验结果是(0, 1, 1, 1, 1)代入得 $L(p) = p^4(1 - p) = p^4 - p^5$ 由于大小果比例为 1 : 4 或 4 : 1, 因此 $\Theta = \left\{ \frac{1}{5}, \frac{4}{5} \right\}$ $L\left(\frac{1}{5}\right) = \left(\frac{1}{5}\right)^4 - \left(\frac{1}{5}\right)^5 = \frac{4}{3125}$ $L\left(\frac{4}{5}\right) = \left(\frac{4}{5}\right)^4 - \left(\frac{4}{5}\right)^5 = \frac{256}{3125}$ 因为 $L\left(\frac{4}{5}\right) > L\left(\frac{1}{5}\right)$, 由极大似然原理, 估计值 $\hat{p} = \frac{4}{5}$, 即取到小果概率为 $\frac{4}{5}$, 从而可以判断该箱苹果是二等品。 3. 思政融入 通过苹果分装问题直观地解释了极大似然估计方法：使得似然函数取最大值的参数值就是极大似然估计值。由此例题，引导同学们思考：在高等数学中如何求函数的极大值？进而总结出更为系统的求极大似然估计量的一般步骤。体现了数学各分支和各方法之间具有普遍联系性，要学会综合应用。
分析评价	本案例在介绍极大似然估计的步骤时，通过似然函数取最大值的参数值就是极大似然估计值和数学各分支之间具有普遍联系性的思政元素紧密的结合在一起。思政元素和知识学习有机结合。
评价者	赵鹏军教授，商洛学院数学与计算机应用学院

案例编号	PTMS—047
案例标题	区间估计——调查某地区工薪阶层妇女从事家务劳动的时间
案例来源	原创
内容简介	在学习区间估计应用时，通过估计地区工薪阶层妇女平均每天从事家务劳动时间，让学生感受知识应用的愉悦感，增强专业的认同感。通过所学知识，为有关部门提供决策依据，提高学生的社会责任感和社会服务意识。
关键词	区间估计，学以致用，社会责任感
编写时间	2024-5-15
编著者	马春洁，助教，商洛学院数学与计算机应用学院
素材形式	文字、图片
育人主题	增强专业的认同感，提高学生的社会责任感和社会服务意识。
素材长度	628 字符
案例正文	1. 知识点：区间估计 定义 设 $\hat{\theta}_1 = \hat{\theta}_1(X_1, X_2, \dots, X_n)$ 及 $\hat{\theta}_2 = \hat{\theta}_2(X_1, X_2, \dots, X_n)$ 是两个统计量，如果对于给定的概率 $1-\alpha (0 < \alpha < 1)$，有 $P(\hat{\theta}_1 < \theta < \hat{\theta}_2) = 1-\alpha,$ 则称随机取件 $(\hat{\theta}_1, \hat{\theta}_2)$ 为参数 θ 的置信区间，$\hat{\theta}_1$ 称为置信下限，$\hat{\theta}_2$ 称为置信上限，$1-\alpha$ 称为置信概率或置信度。 2. 案例简介 调查某地区工薪阶层妇女从事家务劳动的时间 假设从某地区工薪阶层妇女中随机抽取 33 个妇女，她们平均每天从事家务劳动的时间为 2.76 小时，样本的标准差为 0.86，认为妇女从事家务劳动的时间近似服从正态分布 $N(u, \sigma^2)$，计算该地区工薪阶层妇女平均每天从事家务劳动时间 u 的 95% 双侧置信区间。 该问题是关于劳动时间 u 的置信区间，并且方差 σ^2 未知。实际

	上，大部分实际问题是σ^2未知的情况，那么σ^2未知时，u的置信度为$1-\alpha$的置信区间如何计算？将应用u的置信区间解决实际问题。 解决问题（学生自己计算、解决） 上述引例是一个方差σ^2未知时，关于u的置信度为$1-\alpha$的置信区间，因此我们使用公式 1。u的置信度为$1-\alpha$的置信区间为 $\left(\bar{X} - \frac{S}{\sqrt{n}} t_{1-\alpha/2}(n-1), \bar{X} + \frac{S}{\sqrt{n}} t_{1-\alpha/2}(n-1) \right)$ 其中$\bar{x}=2.76, s=0.86, n=33$, 查表可知$t_{0.025}(32)=2.0369$，代入得$u$的置信水平为 95%的双侧置信区间为（2.46，3.06）。 3. 思政融入 讲授区间估计时，采用问题驱动教学法。根据《妇女权益保障法》（图 47-1）的要求，在教学过程中通过对该地区工薪阶层妇女平均每天从事家务劳动的时间估计，让学生感受知识应用的愉悦感，增强专业的认同感。通过所学知识，为有关部门提供决策依据，提高学生的社会责任感和社会服务意识。 图 47-1
分析评价	本案例在教学区间估计时，通过对该地区工薪阶层妇女平均每天从事家务劳动的时间估计，让学生感受到可通过所学知识，为有关部门提供决策依据，提高学生的社会责任感和社会服务意识。
评价者	赵鹏军教授，商洛学院数学与计算机应用学院

案例编号	PTMS—048
案例标题	假设检验的原理——量变到质变的哲理
案例来源	原创
内容简介	在讲授假设检验的过程中，通过引入量变到质变哲理、用联系的、发展的观点看问题等相关思想让学生更容易理解假设检验的相关概念和方法步骤，勉励同学们学习、做事要有恒心和毅力，有量的积累才有质的飞跃，培养学生“锲而不舍，金石可镂”的精神，引导同学们要用联系的、发展的观点看问题，思想上避免偏执一端。
关键词	假设检验，量变到质变，联系发展的观点
编写时间	2024-5-25
编著者	马春洁，助教，商洛学院数学与计算机应用学院
素材形式	文字、图片
育人主题	量变到质变：有量的积累才有质的飞跃。
素材长度	1235 字符
案例正文	1. 知识点：假设检验 假设检验的基本思路是小概率事件基本不会发生即小概率原理(或实际推断原理)，若小概率($\alpha < 0.05$)事件在一次试验中发生了，就有充分的理由怀疑“原假设为真”，即应拒绝原假设。在假设检验问题中，把要检验的假设称为原假设(零假设或基本假设)，记为 H_0。把原假设的对立面称为备择假设或对立假设，记为 H_1。原假设和备择假设两者中必有且仅有一个为真。 2. 案例简介 唯物辩证法——量变到质变的哲学哲理；用联系的、发展的观点看问题 唯物辩证法是马克思主义哲学的重要组成部分，唯物辩证法以自然界、人类社会和思维发展的一般规律作为研究对象，指出“与万物普遍联系”和“按自身规律永恒发展”是世界存在的两个总的基本特征。它揭示了世界的辩证性质，并从不同侧面深入探讨了这

两个基本特征的内涵和外延。其中，矛盾(即对立统一)的观点是唯物辩证法的核心。

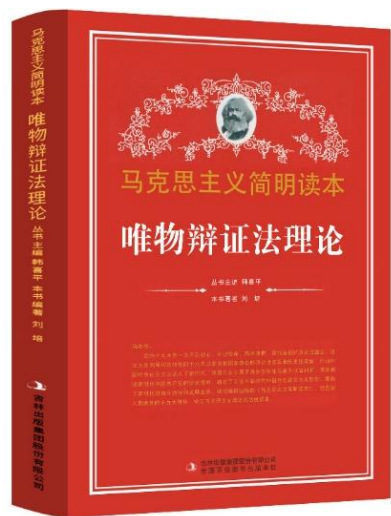


图 48-1

质变到量变的哲理体现在事物发展变化的过程中，揭示了一种深刻的辩证关系。具体来说，这一哲理主要包含以下几个方面：首先，量变是质变的必要准备。任何事物的变化都是从微小的、不显著的量变开始的；其次，质变是量变的必然结果。当事物的量变达到一定程度时，必然会引发质变，使事物从一个阶段发展到另一个阶段；再者，质变又会引起新的量变。在质变完成后，事物会在新的质的基础上开始新的量变，这种新的量变会进一步推动事物的发展，为下一次质变创造条件；最后，质变到量变的哲理还体现了事物发展的连续性和阶段性的统一。

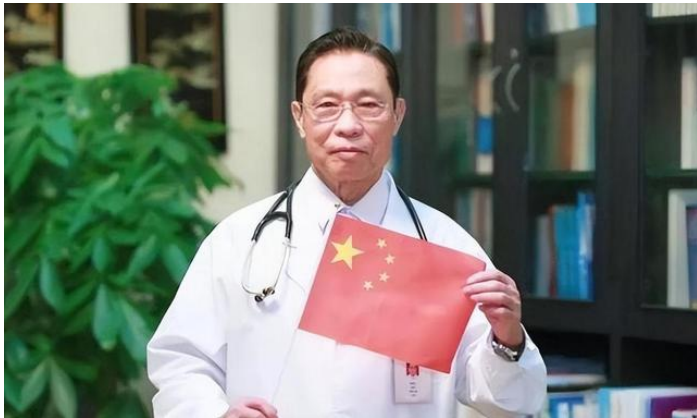
用联系的、发展的眼光看问题，是一种深刻而全面的思考方式，有助于我们更准确地理解事物的本质和规律，以及预测事物的发展趋势。首先，联系的观点强调事物之间的相互依存和相互影响。世界上的一切事物都不是孤立存在的，而是与周围的其他事物有着千丝万缕的联系；其次，发展的观点强调事物是不断运动、变化和发展的。世界是一个永恒发展的过程，任何事物都处在不断的变化之中；最后，将联系和发展的观点结合起来，我们就能更加深刻地理解问题。

3. 思政融入

	(1) 假设检验的思想为小概率事件原理，即一次试验中几乎不发生的事件重复多次后几乎会发生。这一原理阐明，经历了量的积累，最终产生了质的变化。在授课过程中提醒同学们“勿以恶小而为之，勿以善小而不为。”还可以勉励同学们学习、做事要有恒心和毅力，有量的积累才有质的飞跃（图 48-2），培养“锲而不舍，金石可镂”的精神。 图 48-2 (2) 在讲解假设检验的一般步骤时，通过选取不同的显著性水平，可以作出不同判断，让学生明白世间万物，能被绝对肯定或绝对否定的事是很少的，如果苛求获得一个百分之百正确的结论，那或许什么都得不到。引导同学们要用联系的、发展的观点看问题，思想上避免偏执一端。
分析评价	本案例在讲授假设检验的过程中，通过引入量变到质变哲理、用联系的、发展的观点看问题等相关思想让学生更容易理解假设检验的相关概念和方法步骤，勉励同学们学习、做事要有恒心和毅力，有量的积累才有质的飞跃，培养“锲而不舍，金石可镂”的精神。引导同学们要用联系的、发展的观点看问题，思想上避免偏执一端。在教学过程会中思政育人不知不觉就已抵达学生内心深处。
评价者	赵鹏军教授，商洛学院数学与计算机应用学院

案例编号	PTMS—049				
案例标题	假设检验——试剂假阳问题				
案例来源	原创				
内容简介	在学习假设检验的相关内容时，利用试剂假阳问题加深学生对本课程相关概念的理解，同时培养学生的爱国意识；在讨论问题的过程中提升学生科学务实的精神；最后通过钟南山先生的事迹教育学生树立正确的人生导向，并引导学生平时要注重锻炼，提升自身防范意识和能力。				
关键词	假设检验，爱国意识，科学务实				
编写时间	2024-4-10				
编著者	马春洁，助教，商洛学院数学与计算机应用学院				
素材形式	文字、表格、图片				
育人主题	培养学生科学务实的爱国意识；引导学生树立正确的人生导向。				
素材长度	1523 字符				
案例正文	1. 知识点：假设检验 假设检验的基本思路是小概率事件基本不会发生即小概率原理(或实际推断原理)，若小概率($\alpha < 0.05$)事件在一次试验中发生了，就有充分的理由怀疑“原假设为真”，即应拒绝原假设。 在假设检验问题中，把要检验的假设称为原假设(零假设或基本假设)，记为 H_0。把原假设的对立面称为备择假设或对立假设，记为 H_1。原假设和备择假设两者中必有且仅有一个为真。 假设检验用到的主要数学思想是概率意义下的反证思想。 拒绝原假设是有充分逻辑引导的，但接受原假设没有，所以原假设 H_0 应是希望否定的假设，即把想证明的放在备择假设 H_1。 假设检验的一般步骤如表 49-1。 表 49-1 假设检验的步骤 <table border="1" style="width: 100%; border-collapse: collapse;"> <tr> <td style="width: 10%; text-align: center;">(1)</td><td>正确提 H_0 和 H_1;</td></tr> <tr> <td style="text-align: center;">(2)</td><td>构造检验统计量，该统计量至少应该满足在 H_0 成立的情</td></tr> </table>	(1)	正确提 H_0 和 H_1 ;	(2)	构造检验统计量，该统计量至少应该满足在 H_0 成立的情
(1)	正确提 H_0 和 H_1 ;				
(2)	构造检验统计量，该统计量至少应该满足在 H_0 成立的情				

		况下。其抽样分布易于计算（查找）；
	(3)	对于 α （显著性水平），确定 H_0 的拒绝域；
	(4)	带入样本值进行检验。
2. 案例简介 (1) 试剂假阳问题 新冠肺炎疫情爆发初期，新闻报道中时常会出现同一个人几天内做三四次检测结果可能前几次是阴性,后几次是阳性,也就是会出现假阳的检测结果。既此阶段新冠病毒检测试剂的准率不高，有医学技术方面的问题,我们从假设检验研究两类错误的角度思考：实施情况是测试者未染病或染病，检测结果是阳性或阴性。 从实际情况看，任何的检验方法使犯错误的可能性不存在。理想的试剂应使假阴假阳出现的概率都越小越好,但样本量有限、检测技术没有明显优化提升时，一类错误概率的减少必会导致另一类错误概率的增加，因此处理原则是人为限定犯第一类错误的概率 α，为降低犯第二类错误的概率我们可以采用的方法一是增大样本容量，实际上随着检测技术的提升是可以实现犯两类错误的概率同时降低的。所以，从统计学的观点看,新闻报道中假阴假阳患者出现并不奇怪，通过试剂结果判断是否染病出现这两类错误是可以理解的。 在选取原假设与备择假设时，二者地位应平等，而在控制犯第一类错误的概率 α 的原则下，使得采取拒绝 H_0 的决策变得较慎重，即 H_0 得到特别的保护。于是通常根据生活和研究的经验选取更为实际的结论作为原假设，或者尽可能使更无力承担后果的错误成为第一类错误。疫情初期测试的目的是为了筛选出染病的患者以进行隔离治疗，因此染病作为备择假设 H_1，会出现四种情况如下表		
表 49-2 测试结果		
	测试结果	
事实情况	未染病 H_0	染病 H_1

	阳性 H_1	假性（第一类错误）	真（确诊）
	阴性 H_0	真（健康）	假性（第二类错误）
（2）钟南山先生的事迹 亲临一线，担任专家组组长 普及防控知识，引导公众行动 提出新型冠状病毒的传染性，引发全球关注 分享防控经验，推动国际合作			
			
图 29-3 钟南山			
3. 思政融入 在学习假设检验的相关内容时，利用试剂假阳问题加深学生对本课程相关概念的理解，疫情期间大家共同经历的种种让学生认识到中国的智慧和精神，同时培养学生的爱国意识；在讨论问题的过程中提升学生科学务实的精神；最后结合钟南山先生的事迹，教育同学们要努力读书，未来才能成为对社会有用的人，用知识去战胜危险，用勇敢和担当去化解危难，引导学生树立远大的理想和正确的人生导向。			
分析评价	本案例根据疫情期间试剂盒精度分析的过程，运用假设检验的理论知识解决面临的实际问题。并结合钟南山先生的事迹，教育同学们要读书，未来才能成为对社会有用的人，树立正确人生导向。并让学生体会到爱国意识和科学务实精神。在传授知识的同时，做到了育人细无声。		
评价者	赵鹏军教授，商洛学院数学与计算机应用学院		

案例编号	PTMS—050
案例标题	单个正态总体方差的假设检验——中国沈阳机床突破国外封锁
案例来源	原创
内容简介	在介绍单个正态总体方差的假设检验时，通过中国在高端机床上的精度的突破引出通过正态总体的单侧检验可以评价机床在加工一批零件的质量，从而评价机床的精度。激发学生的爱国情怀，努力学习，勇于突破外界封锁，为中华崛起出一份分力。
关键词	假设检验，爱国情怀，勇于突破
编写时间	2024-5-7
编著者	马春洁，助教，商洛学院数学与计算机应用学院
素材形式	文字
育人主题	勇于突破外界封锁，科技兴国的爱国情怀
素材长度	904 字符
案例正文	1. 知识点：单个正态总体方差的假设检验 设$x_1, x_2, \dots, x_n$是总体随机变$X \sim N(\mu, \sigma^2)$的样本的观测值，检验σ^2与σ_0^2是否相等，也就是检验统计假设$H_0: \sigma^2 = \sigma_0^2$是否成立。 假设总体均值$\mu$未知，检验统计量$\chi^2$为： $\chi^2 = \frac{(n-1)s^2}{\sigma_0^2}$ 其中：$s^2 = \frac{\sum (x-\bar{x})^2}{n-1}$为$\sigma^2$的估计值。 当$\sigma^2 = \sigma_0^2$时，检验统计量$\chi^2$服从自由度为 n-1 的$\chi^2$分布，即：$\chi^2 \sim \chi^2(n-1)$，若取显著性水平为$\alpha$查$\chi^2$分布表得到检验临界值$\chi^2(n-1)$。 单侧检验 如果拒绝域分布在一侧，根据备选假设H_1确定是进行右侧检验还是左侧检验。 若$H_1: \sigma^2 > \sigma_0^2$则为右侧检验

若 $H_1: \sigma^2 < \sigma_0^2$ 则为左侧检验

2. 案例简介

中国沈阳机床突破国外封锁

例 高端数控机床的技术水平是衡量一个国家核心制造能力的标准之一。去年，中国机床以 1823 亿元的生产额拿下了世界第一。但是，大而不强是制约中国机床发展的最大瓶颈，如何在高端机床制造上实现突围？我国最大的数控机床研发生产基地——通用技术沈阳机床得益于核心技术指标的大幅提升，龙门系列新产品得到了用户高度认可（图 50-1）。刚刚过去的一年，沈阳机床组建科研攻关小组 35 个，攻克高端数控机床设计制造等 10 多项核心关键技术，研发投入占到销售总收入的 11.9%。

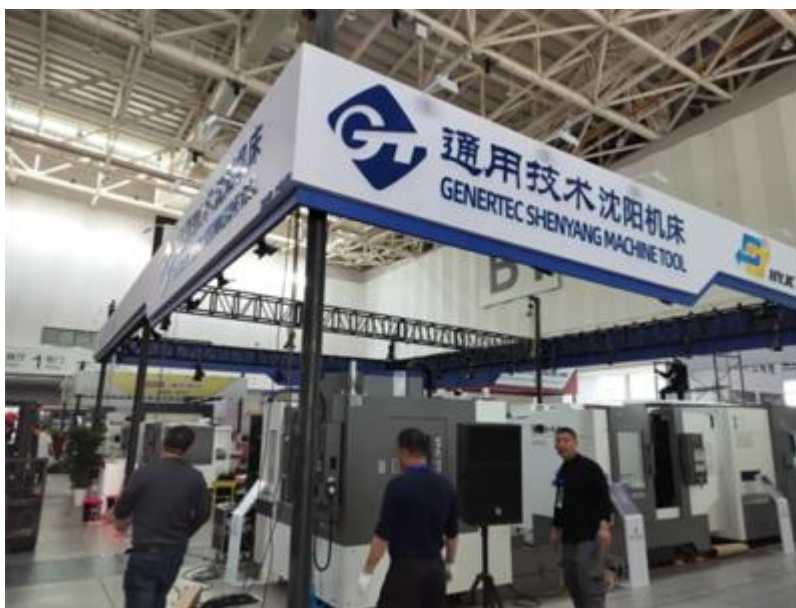


图 50-1

导轨是机床上最容易损耗的核心部件之一，它的质量直接影响着机床的加工精度。目前，国内的淬火技术大多只能加工长度为 2 米的零件，但沈阳机床严昊明和团队成功挑战了对 11 米长的零件进行淬火，此外，针对大体积龙门机床定位精度达到 0.01 毫米就属于精密级水平了。目前，沈阳机床的龙门系列产品都已经成功跨越了 0.01 毫米这一行业门槛。通过中国突破封锁这一案例激发学生的爱国情怀和勇于突破困难的精神，并引出实际问题：假设使用沈阳

	机床制造的高端机床加工一批零件，零件厚度$X \sim N(\mu, \sigma^2)$，按标准要求$\sigma^2 \leq 0.025 \text{mm}^2$，现从中抽取 9 个，经测试后算得样本方差$s^2 = 0.036$ 分许这种零件厚度是否符合标准($\alpha = 0.10$, 零件厚度服从正态分布)? 解 这个问题属于正态总体方差的单侧检验问题。 假设 $H_0: \sigma^2 \leq 0.025$ $H_1: \sigma^2 > 0.025$ 选取检验统计量为： $\chi^2 = \frac{(n-1)s^2}{\sigma_0^2} = \frac{8 \times 0.036}{0.025} = 11.52$ 对于$\alpha = 0.10$ 查χ^2分布表得： $\chi_{1-\alpha}^2 (n-1) = \chi_{0.9}^2 (8) = 13.62, \text{拒绝域为}[13.62, +\infty]$ 而$\chi^2=11.52 < 13.62$，接受假设H_0，即：这种零件的厚度符合标准。 3. 思政融入 在介绍单个正态总体方差的假设检验时，通过中国在高端机床上的精度的突破引出通过正态总体的单侧检验可以评价机床在加工一批零件的质量，从而评价机床的精度，让学生感受到单个正态总体方差的假设检验在实际问题的应用。结合这一案例，让学生了解到中国科技的发展需要大量的知识储备，激发学生的爱国情怀和学习欲望，鼓励学生努力学习，并勇于突破自己的短板，用自己所学勇于突破外界封锁，为中华崛起出一份自己的力。
分析评价	本案例在介绍单个正态总体方差的假设检验时，通过引入中国沈阳机床突破国外封锁这一案例，激发了学生的爱国情怀，并通过正态总体方差的假设检验来评价机床加工零件的精度例子加深了知识的学习。体现了思政元素和数学知识学习之间的有机结合。
评价者	赵鹏军教授，商洛学院数学与计算机应用学院