

商洛学院课程思政案例库

课程名称： 数学分析
负责人： 孔 亮
编著时间： 2024年6月

教务处印制

前言

为深入贯彻落实习近平总书记关于教育的重要论述和全国教育大会精神，贯彻落实中共中央办公厅、国务院办公厅《关于深化新时代学校思想政治理论课改革创新的若干意见》，把思想政治教育贯穿人才培养体系，全面推进高校课程思政建设，发挥好每门课程的育人作用，提高高校人才培养质量，2020年5月，教育部印发了《高等学校课程思政建设指导纲要》，纲要中指出“理工类课程要在教学中把马克思主义立场观点方法的教育与科学精神的培养结合起来，提高学生正确认识问题、分析问题和解决问题的能力，要注重科学思维方法的训练和科学伦理的教育，培养学生探索未知、追求真理、勇攀科学高峰的责任感和使命感”。

《数学分析》是数学与应用数学专业的专业基础课。教学时间长、理论严谨、系统性强。本课程以极限理论为基础和工具，以实数理论、微积分学、级数等为核心内容，通过各教学环节，使学生掌握数学分析的基本概念、基本理论和基本方法，培养学生的抽象思维、逻辑推理及分析运算能力，提高应用微积分学这一工具解决实际应用问题的能力，为学习数学与应用数学专业其它课程打下良好基础。《数学分析》课程2010年被评为校级精品课程；2021年被评为校级线下一流课程；2024年被评为省级线下一流课程。《数学分析》课程团队教师以近15年课程教学实践为基础，探索将课程思政教学案例融入《数学分析》的切入点，研究教学过程中的思政育人方法，丰富和完善课

程思政体系，将思政元素以润物细无声的方式引入到《数学分析》的课程教学之中，并总结了教学中的优秀案例构成《数学分析》课程思政案例库。

《数学分析》课程思政案例库由课程团队成员孔亮、岳毅蒙、卢晶、李超、王瑞老师合作完成。邀请我校数学与计算机应用学院具有相关学科和研究经历的正高级职称教师对案例进行逐一审核评价。在《数学分析》课程教学中，将进一步挖掘专业素养、科学精神、人文情怀等思政元素，帮助学生塑造正确的世界观、人生观、价值观，实现价值引领、知识传授和能力培养的统一，提高课程教学质量和人才培养质量。

目 录

20031101-001	1
20031101-002	4
20031101-003	6
20031101-004	9
20031101-005	12
20031101-006	15
20031101-007	19
20031101-008	22
20031101-009	24
20031101-010	27
20031101-011	30
20031101-012	32
20031101-013	36
20031101-014	39
20031101-015	42
20031101-016	47
20031101-017	50
20031101-018	54
20031101-019	58
20031101-020	61
20031101-021	64
20031101-022	67
20031101-023	71
20031101-024	75
20031101-025	79
20031101-026	82
20031101-027	85
20031101-028	88
20031101-029	91
20031101-030	95
20031101-031	99
20031101-032	102
20031101-033	105
20031101-034	108
20031101-035	111
20031101-036	116
20031101-037	119
20031101-038	123
20031101-039	128
20031101-040	132
20031101-041	135
20031101-042	138

20031101-043	141
20031101-044	144
20031101-045	148
20031101-046	151
20031101-047	154
20031101-048	157
20031101-049	161
20031101-050	164

案例编号	20031101-001
案例标题	实数
案例来源	原创
内容简介	介绍国外著名数学家，如笛卡尔、牛顿和拉格朗日等；国内数学家华罗庚、陈景润等的突出贡献；介绍实数的发展史。
关键词	数学家；实数
编写时间	2021-3-1
编著者	卢晶 商洛学院
素材形式	文字、图片等
育人主题	激发学生的爱国精神，科学精神和创新精神。
素材长度	1249
案例正文	<p>案例一 中外数学家. 科学的发展，凝聚着科学家的辛勤劳动。《数学分析》课程的教学内容，无疑也是历代数学家们呕心沥血的研究成果。</p> <div style="text-align: center;">  <p>笛卡尔 狄利克雷 刘徽 华罗庚 拉格朗日</p> </div> <p>笛卡尔 (Descartes) 创立了直角坐标系，对西方现代哲学、物理学、力学、天文学和数学方面有着的杰出的成就；德国数学家狄利克雷 (Dirichlet) 在分析学、数论和数学物理方面的突出贡献；中国古代的数学家刘徽、祖冲之等在数学上有卓越的贡献；数学分析的主要奠基者魏尔斯特拉斯 (Weierstrass) 对分析数学有着重要的贡献；数学家、物理学家牛顿在创立了微积分；意大利数学家拉格朗日 (Lagrange) 在数学、力学和天文学三个学科中有着突出贡献；柯西 (Cauchy) 对微积分学、整个分析学的基础和极限论做出了贡献；近代陈省身、华罗庚、苏步青、丘成桐等中国数学家做出了国际认可的成果. 同时，杨乐、张广厚与值分布理论，陈景润、王元与哥德巴赫猜想等国内外数学家的奋斗故事。</p>

【思政元素】 使学生了解古今中外数学家及其数学成就，激发他们的爱国精神，科学精神和创新精神。

案例二 实数发展史：任何两个自然数之和与积必定是自然数，即自然数集合 N 对于加法与乘法运算是封闭的，但 N 对于减法运算不封闭，即两个自然数之差不一定还是自然数。当数系由自然数集合扩充到整数集合 Z 后，关于加法、减法和乘法都封闭了。但 Z 对于除法运算不封闭。因此，数系又由整数集合 Z 扩充到有理数集合 Q 。有理数集合 Q 关于加法、减法、乘法和除法都是封闭的。

知识点 1. 实数

$\left\{ \begin{array}{l} \text{有理数: } \frac{q}{p} (p, q \text{ 为整数且 } p \neq 0) \text{ 或有限小数或无限循环小数} \\ \text{无理数: 无限不循环小数} \end{array} \right.$

$R = \{x | x \text{ 为实数}\}$ —— 全体实数的集合。

2. 实数常用性质

(1) 封闭性（实数集 R 对 $+$, $-$, \times , \div ）四则运算是封闭的。即任意两个实数的和、差、积、商（除数不为 0）仍是实数。

(2) 有序性：任意两个实数 a, b 必满足下列关系之一：

$$a < b, a > b, a = b .$$

(3) 传递性： $a < b, b > c \Rightarrow a > c .$

(4) 阿基米德性： $\forall a, b \in R, b > a > 0 \Rightarrow \exists n \in N$ 使得 $na > b .$

(5) 稠密性：两个不等的实数之间总有另一个实数，且既有有理数又有无理数。

(6) 实数集 R 与数轴上的点有着一一对应关系。

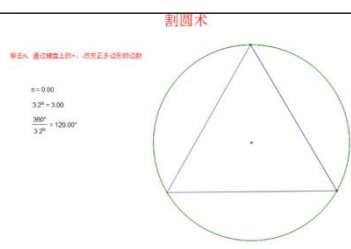


【思政元素】 1. 加深学生对实数的认识，激发学生学习数学的兴趣，引起学生的注意。

2. 培养学生的创新精神，增进数学教学的生动性和趣味性，培养学生的科学精神。

	3. 弄清实数发展的过程，透过过程对理论体系与发展模式做出科学、合理的解释，进而探究数学学科发展的规划与本质.
分析评价	案例一内容新颖、生动，最大程度的吸引了学生，激发学生认真思考的热情；案例二介绍实数发展史，激发学生的学习兴趣，使学生印象深刻.
评价者	王念良 教授 商洛学院数学与计算机应用学院

案例编号	20031101-002
案例标题	映射与函数
案例来源	原创
内容简介	介绍我国自主研发的新能源汽车的路程与时间的关系；炮弹发射高度与发射时间的关系；与生活密切相关的分段函数；圆周率故事.
关键词	路程；时间；函数；圆周率
编写时间	2021-3-5
编著者	卢晶 商洛学院
素材形式	文字
育人主题	善于发现事物中的真、善、美 .培养学生对待科学的 严谨态度，努力学习科学知识，为国做贡献，激发爱国热情.
素材长度	1249
案例正文	<p>案例一 我国自主研发能力日渐提高，特别是新能源汽车，假设该汽车以 60km/h 的速度匀速行驶，汽车路程与时间的关系表示为 $s = 60t$ 像这种关系我们用数学描述为什么函数？</p> <p>案例二 国庆大阅兵，我们国家展示了强大的军事力量，我们作为中国人很骄傲，那么炮弹发射高度与发射时间我们用数学描述为什么函数？</p> <p>案例三 分段函数：生活中的水、电费等阶梯计价，可以倡导节约，反对铺张浪费，节能环保.</p> <p>案例四 圆周率 π 的故事，祖冲之，中国古代杰出贡献，中国人的骄傲，培养文化自信，爱国主义精神.</p> <p>知识点 定义 给定两个实数 D 和 M ,若有对应法则 f , 使对于每一个 $x \in D$, 都有惟一的 $y \in M$ 与它对应, 则称 f 是定义在数集 D 上的函数, 记作</p> $f: D \rightarrow M, x \mapsto y .$ <p>数集 D 称为函数 f 的定义域, x 所对应的 y 称为 f 在点 x 的函数值, 记为 $f(x)$, 全体函数数值的集合 $f(D) = \{y \mid y = f(x), x \in D\}$ 称为函数 f 的值域.</p>

	<p>函数的表示法：有些函数在其定义域的不同部分用不同的公式表达，这类函数通常称为分段函数，如</p> $\text{符号函数 } \text{sgn} = \begin{cases} 1, x > 0 \\ 0, x = 0 \\ -1, x < 0 \end{cases}, \text{ 绝对值函数 } f(x) = \begin{cases} x, x \geq 0 \\ -x, x < 0 \end{cases}$ $R(x) = \begin{cases} \frac{1}{q}, \text{ 当 } x = \frac{p}{q} (p, q \in N_+, \frac{p}{q} \text{ 为既约真分数}) \\ 0, \text{ 当 } x = 0, 1 \text{ 和 } (0, 1) \text{ 内的无理数} \end{cases}$ <p>【思政元素】 1. 增强“四个自信”，进一步培养学生爱国主义精神，鼓励树立远大理想，为实现中国梦奋斗。</p> <p>2. 结合生活实际，深刻体会数学的“无处不在”以及科学性和严谨性；帮助学生形成良好的学习习惯、思维严谨、工作求实的作风。</p>
分析评价	<p>通过各个方面介绍了四个案例，从国防到生活，从古至今，数学思想无处不在，函数关系隐藏在我们的方方面面，让学生体会到了生活中要善于思考，发现问题，多方面发展，努力为国家做贡献。</p>
评价者	王念良 教授 商洛学院数学与计算机应用学院

案例编号	20031101-003
案例标题	数列的极限
案例来源	原创
内容简介	以刘徽割圆术以及《金刚川》电影的极限思维为引，融合课程思政特色，激发学生的学习兴趣，让学生理解数列极限的同时，能够发现和分析生活中的极限思想.从宏观方面，帮助学生探寻数学知识中蕴含的人生哲理和辩证唯物观，提升学生的文化自信感和民族自豪感，激发民族自尊心和爱国主义情感，培养学生的责任意识，传承科学家的科学精神.从微观方面，讲解极限的思想就是让学生要不忘初心，砥砺前行，精益求精，无限接近，方得始终，具备“水滴石穿”的精神，坚持才能成功.
关键词	数列；数列极限；收敛
编写时间	2021-3-8
编著者	李超，商洛学院
素材形式	文字、图片等
育人主题	不忘初心，砥砺前行，精益求精，无限接近，方得始终，具备“水滴石穿”的精神，坚持才能成功.
素材长度	1084
案例正文	<p>案例一 极限思想（刘徽割圆术）， 介绍我国古代数学家对数列极限思想和圆周率所做的贡献.</p>  <p>案例二 微视频（2分钟）：《金刚川》 电影的部分片段.</p>  <p>案例三 水滴石穿的极限思维. 上面的例子中都含有数列的应用和数列极限思维.</p>  <p>知识点</p> <p>定义1 在自然数集上的函数，记为</p> $x_n = f(n), n = 1, 2, 3, \dots$ <p>由于全体自然数可以从小到大排成一列，因此数列的对应值也可以排成一列：</p>

$$x_1, x_2, \dots, x_n, \dots$$

第 n 项 x_n 称为一般项或通项.

2. 用圆内接正 $6 \times 2^{n-1}$ 边形的面积来近似代替该圆的面积时, 得到数列 $A_1, A_2, \dots, A_n, \dots$.

3. 设人数为 n , 桥的长度记为 x_n , $x_n = f(n), n = 1, 2, 3, \dots$ 从大到小排列 $x_1, x_2, \dots, x_n, \dots$.

4. 设水滴数为 n , 腐蚀的质量为 x_n , $x_n = f(n), n = 1, 2, 3, \dots$ 从大到小排列 $x_1, x_2, \dots, x_n, \dots$.

例 讨论数列 $\left\{ \frac{n+1}{n} \right\}$.


定义 2 若对 $\forall \varepsilon > 0$ (不论 ε 多么小), 总 \exists 自然数 $N > 0$, 使得当 $n > N$ 时都有 $|x_n - a| < \varepsilon$ 成立, 这时就称常数 a 是数列 x_n 的极限, 或称数列 x_n 收敛于 a , 记为 $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = a$, 或 $x_n \rightarrow a (n \rightarrow \infty)$. 如果数列没有极限, 就说数列是发散的. 数列 x_n 收敛于 a , 记为

$$\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = a, \text{ 或 } x_n \rightarrow a (n \rightarrow \infty).$$

【思政元素】1. 刘徽割圆术: 在几何方面, 提出了“割圆术”, 即将圆周用内接或外切正多边形穷竭的一种求圆面积和圆周长的方法. 他利用割圆术科学地求出了圆周率 $\pi = 3.14$ 的结果. 刘徽在割圆术中提出的“割之弥细, 所失弥少, 割之又割以至于不可割, 则与圆合体而无所失矣”, 增加学生“四个自信”, 培养学生爱国主义精神, 并激发学生努力实现理想、实现自我价值的同时, 为实现中国梦而奋斗. 通过动画展示过程, 培养学生观察和分析能力, 培养学生量变到质变, 大问题划分小问题解决的辩证思维. 培养学生锲而不舍, 刻苦钻研的学习精神.

2. 《金刚川》人桥: 树立学生的辩证唯物观, 理想, 不忘初心, 坚持理想, 砥砺前行.

	<p>3. 水滴石穿：古代诗词及成语融入的极限思想，增强民族的向心力和凝聚力.</p> <p>4. 数列的极限中蕴藏着丰富的辩证思想. 数列$\{x_n\}$中的每个x_n都不是a，反映了过程与结果相对立的一面；但取极限的结果又使x_n转化为a，这又反映了过程与结果相统一的一面. 可见极限是利用有限来认识无限的一种数学方法，同时也说明极限是有限与无限的对立统一. 每个x_n都是极限a的近似值，一般地，n越大近似程度就越好，但无论n多么大，x_n总是a的近似值，只有当n无限变大时，近似值x_n才转化为a，体现了近似与精确的对立统一以及量变与质变的对立统一. 培养学生量变到质变，大问题划分小问题解决，对立统一的辩证思维. 培养学生锲而不舍，刻苦钻研的学习精神.</p>
分析评价	<p>本案例通过刘徽割圆术、《金刚川》电影的极限思维和水滴石穿引入数列定义，引导学生发现和分析生活中的极限思想；提升学生的文化自信感和民族自豪感，激发民族自尊心和爱国主义情感，培养学生的责任意识，传承科学家的科学精神.</p>
评价者	<p>王晓 教授，商洛学院数学与计算机应用学院</p>

案例编号	20031101-004
案例标题	函数的极限
案例来源	原创
内容简介	通过诗词介绍极限定义，引导学生在学习函数极限的定义中感悟中国古代诗词文化，培养学生的数学语言抽象能力、逻辑推理能力及分析问题和解决问题的能力。
关键词	函数极限定义；
编写时间	2021-4-1
编著者	卢晶 商洛学院
素材形式	文字、图片等
育人主题	感悟中国传统文化，培养文化自信。
素材长度	1077
案例正文	<p>案例一 黄鹤楼送孟浩然之广陵</p> <p style="text-align: center;">【唐】李白</p> <p style="text-align: center;">故人西辞黄鹤楼， 烟花三月下扬州。 孤帆远影碧空尽， 唯见长江天际流。</p>  <p>孤帆远影碧空尽，唯见长江天际流. 表面看来这两句诗全是写景，其实却有着诗人鲜明的形象. 孤帆绝不是说浩瀚的长江上只有一只帆船，而是写诗人的全部注意力和感情只集中在友人乘坐的那一只帆船上. 诗人在黄鹤楼边送行，看着友人乘坐的船挂起风帆，渐去渐远，越去越小，越去越模糊了，只剩下一点影子了，最后终于消失在水天相接之处，而诗人仍然久久伫立，目送流向天际的江水，似乎要把自己的一片情意托付江水，陪随行舟，将友人送到目的地. 这两句诗表达了李白与友人多么深挚的友情，然而在诗句中却找不到友情这个字眼. 诗人巧妙地将依依惜别的深情寄托在对自然景物的动态描写之中，将情与景完全交融在一起了，真正做到了含吐不露而余味无穷.</p> <p>李白的这句诗就是数学概念和文学意境的碰撞，诗的意境正好契合极限的概念. 极限是对孤帆远影的现实精确化、形式化的解释. 你可以想象一下，当朋友的小船在烟波浩渺的江面上越走越远，直至消失在天际的尽头，只剩下滚滚的江水在天边孤独的奔流。整个</p>

过程正好体现了无限远处的逼近是 0，量变引起质变.

案例二 极限反映的是函数的变化的一种终极目标，就如我们的理想，要不忘初心、牢记使命，砥砺前行.

案例三 证明函数极限 $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{1}{x} = 0$.

知识点 定义 1 设 f 为定义在 $[a, +\infty)$ 上的函数， A 为定数. 若对于任给的 $\varepsilon > 0$ ，存在正数 $M (\geq a)$ ，使得当 $x > M$ 时，有

$$|f(x) - A| < \varepsilon,$$

则称函数 f 当 x 趋于 $+\infty$ 时以 A 为极限，记作

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = A, \text{ 或 } f(x) \rightarrow A.$$

几何意义：对于任给 $\varepsilon > 0$ ，在坐标平面上平行于 x 轴的两条直线 $y = A + \varepsilon$ 与 $y = A - \varepsilon$ ，围成以直线 $y = A$ 为中心线、宽为 2ε 的带形区域；定义中的“当 $x > M$ 时，有 $|f(x) - A| < \varepsilon$ ”表示：在直线 $x = M$ 的右方，曲线 $y = f(x)$ 全部落在这个带形区域之内. 如果正数 ε 给得小的点，即当带形区域更窄一点时，直线 $x = M$ 一般要往右平移；但无论带形区域如何窄，总存在这样的证数 M ，使得曲线 $y = f(x)$ 在直线 $x = M$ 的右边部分落在这个更窄的带形区域内.

【思政元素】 1. 通过循序渐进的求函数极限例子的引入，进一步培养学生勇于探索的精神.

2. 通过对函数极限的证明，培养学生深刻体会科学的科学性和严谨性.

3. 在学习数学分析中，感悟中国古代诗词中的文化，体验数学之美.

4. 极限思想的思维功能. 极限思想在现代数学乃至物理学等学科中，有着广泛的应用，这是由它本身固有的思维功能所决定的. 极限思想揭示了变量与常量、无限与有限的对立统一关系，是唯物

	<p>辩证法的对立统一规律在数学领域中的应用. 借助极限思想, 人们可以从有限认识无限, 从“不变”认识“变”, 从“直线构成形”认识“曲线构成形”, 从量变去认识质变, 从近似认识精确.</p> <p>5. 极限值 A 代表我们的人生目标, x 代表为此目标所做的不懈努力和奋斗, 激发学生为目标奋斗的潜能, 培养学生追求卓越的精神.</p>
分析评价	<p>本案例通过中国古代诗词介绍函数极限, 通过对定义的深刻理解, 培养学生的数学语言抽象能力、逻辑推理能力及分析问题和解决问题的能力.</p>
评价者	王念良 教授 商洛学院数学与计算机应用学院

案例编号	20031101-005
案例标题	第二个重要极限
案例来源	原创
内容简介	通过剖析公式引导学生发现公式的特征，提示学生由特殊到一般，利用夹逼定理严格证明得到第二重要极限标准型，连续复利的数学模型进一步揭示了校园贷的本质，引导学生树立正确的人生观、价值观.
关键词	复利问题；第二个重要极限
编写时间	2024-5-25
编著者	王瑞 商洛学院
素材形式	文字、图片等
育人主题	引导学生树立正确的人生观、价值观，鼓励学生认真学习文化知识，学会透过现象看本质，将理论知识应用到实践中.
素材长度	1443
案例正文	<p>案例一 以《荀子·劝学》中“不积跬步，无以至千里；不积小流，无以成江海”为引言，通过两个算式“$1.02365 \approx 1377.4$，$0.98365 \approx 0.0006$”，说明每天努力一点是多么重要，指出底数变化在指数计算下对极限的影响，引出复利问题.</p>  <p>【课程思政】在劝导学生要勤奋学习的同时，宣扬中国文化的博大与智慧，揭示名言和算式背后蕴含的数学本质，让学生产生学习兴趣并将求知欲转为学习的动力，完成从现实问题到数学理论的过渡.</p> <p>案例二 复利问题：以本金 1 元为例，年利率为 100%，如果一年计息一次，那么一年之后的本利和就是“$1(\text{本金})+1(\text{息})=2(\text{元})$”；在保证年利率 100%不变的情况下，如果每半年复利一次，那么半年的利率就是 0.5 元，半年后的本利和是 $(1+0.5)$ 元，以此作为新本金，再存入下一个半年，那么一年之后的本利和为</p> <p style="text-align: center;">“$(1+0.5)^2=2.25(\text{元})$”，</p> <p>本利和增加了；如果每月复利一次，一年之后的本利和为</p> <p style="text-align: center;">“$(1+1/12)^{12}=2.61(\text{元})$”，</p> <p>本利和依然增加了；如果每天复利一次，一年后的本利和为</p> <p style="text-align: center;">$(1+1/365)^{365}=2.71(\text{元})$”，</p>

本利和再次增加了. 由此可见, 随着计息期数的增加, 本利和会越来越来高. 设计问题: 如果每小时复利一次、每秒复利一次、每一刻(复利次数 n 趋于无穷大时)复利一次, 本利和会无限制地增加吗? 如果不会, 本利和是否会趋于某一定值? 即数列 “ $(1+1/n)$ ” 会收敛于何值?

【课程思政】 校园贷是一种网络贷款平台, 以在校大学生为主要客户群, 为大学生提供分期消费贷款和小额现金贷款, 收取分期手续费和利息盈利. 从表面上看, 这种借贷周期短、额度小, 但有些校园贷的利率高于银行 20-30 倍, 本质上就是高利贷. 大学生尚未形成成熟的 “三观”, 社会认知能力较差, 防范意识较弱, 消费观容易产生偏差, 最终在不断膨胀的消费欲望和侥幸心理影响下陷入 “连环贷” 的陷阱, 对人身安全和心理健康造成重大伤害.

知识点

准则 II: 单调有界数列必有极限.

如果数列 x_n 满足: $x_1 \leq x_2 \leq \dots \leq x_n \leq \dots$, 就称之为单调增加数列; 若满足: $x_1 \geq x_2 \geq \dots \geq x_n \geq \dots$, 就称之为单调减少数列; 同理亦有严格单增或单减, 以上通称为单减数列和严格单减数列.

准则 II': 单调上升, 且有上界的数列必有极限.

准则 II'': 单调下降, 且有下界的数列必有极限.

注 1: 由前已知, 有界数列未必有极限, 若加单调性, 就有极限.

2: 准则 II, II', II'' 可推广到函数情形中.


第二个重要极限: $\lim_{x \rightarrow \infty} (1 + \frac{1}{x})^x = e$

作为准则 II 的一个应用, 下面来证明极限 $\lim_{x \rightarrow \infty} (1 + \frac{1}{x})^x$

注 1: 关于此极限存在性的证明, 书上有不同的方法.

2: 可证明: $\lim_{x \rightarrow \infty} (1 + \frac{1}{x})^x = \lim_{n \rightarrow \infty} (1 + \frac{1}{n})^n = e$, 利用变量代换还可以得到这一极限的一般形式:

	$\lim_{h(x) \rightarrow +\infty} \left(1 + \frac{1}{h(x)}\right)^{h(x)} = e; \quad \text{或} \quad \lim_{g(x) \rightarrow 0} (1 + g(x))^{1/g(x)} = e$ <p>3: 指数函数 $y = e^x$ 及自然对数 $y = \ln x$ 中的底就是这个常数 e.</p> <p>相应于准则 II, 函数也有类似的准则, 例如当 $x \rightarrow x_0^-$ 时有</p> <p>准则: 设函数 $f(x)$ 在 x_0 的某个左邻域内单调并且有界, 则 $f(x)$ 在 x_0 的左极限 $f(x_0^-)$ 必定存在.</p> <p>【思政元素】 通过剖析公式引导学生发现公式的特征, 提示学生由特殊到一般, 利用夹逼定理严格证明得到第二重要极限标准型. 在学生掌握极限的类型与结构特点的基础上, 引导学生对公式中的底数和指数部分做适当变形, 利用变量替换的方法得到重要极限的两种推广型, 从而启发学生认清第二重要极限的本质, 学会透过现象看本质, 最终完成数学理论知识的升华.</p> <p>给出第二重要极限的标准型和推广型计算公式, 引导学生思考并给出“连续复利”的数学模型, 从而将无理数 e 拓展到指数函数. 由此可见, 连续复利与计息期数 n 无关, 只与年利率 r 有关, 在资本的积累、放射线性衰减、细菌的生长等许多实际问题中都会遇到. 这表明第二重要极限与自然、社会生活中的事物密切相关.</p> <p>连续复利的数学模型进一步揭示了校园贷的本质. 引导学生树立正确的人生观、价值观, 鼓励学生认真学习文化知识, 学会透过现象看本质, 将理论知识应用到实践中.</p>
分析评价	<p>通过剖析公式引导学生发现公式的特征, 提示学生由特殊到一般, 利用夹逼定理严格证明得到第二重要极限标准型, 连续复利的数学模型进一步揭示了校园贷的本质, 引导学生树立正确的人生观、价值观, 鼓励学生认真学习文化知识, 学会透过现象看本质, 将理论知识应用到实践中.</p>
评价者	王念良 教授 商洛学院数学与计算机应用学院

案例编号	20031101-006
案例标题	无穷小量与无穷大量
案例来源	原创
内容简介	通过介绍《黄鹤楼送孟浩然之广陵》《入若邪溪》，在学习无穷小量与无穷大量的过程中，让学生体验古诗词文化，感受诗词文化的意境，培养文化自信；通过介绍无穷小量与无穷大量的关系，引导同学们在今后的工作学习生活中，可以辩证的看待处理自己遇到的问题，多角度看问题、处理问题. 鼓励学生在奋斗中实现人生价值，升华人生境界.
关键词	无穷小量；无穷大量；极限
编写时间	2021-5-1
编著者	孔亮 商洛学院
素材形式	文字、图片等
育人主题	体验古诗词文化，感受诗词文化的意境，培养文化自信；辩证的看待处理自己遇到的问题.
素材长度	1372
案例正文	<p>案例一 黄鹤楼送孟浩然之广陵</p> <p>【唐】李白</p> <p>故人西辞黄鹤楼，烟花三月下扬州。 孤帆远影碧空尽，唯见长江天际流。</p> <p>《黄鹤楼送孟浩然之广陵》全诗寓</p>  <p>离情于写景之中，以绚丽斑驳的烟花春色和浩瀚无边的长江为背景，极尽渲染之能事，绘出了一幅意境开阔、情丝不绝、色彩明快、风流倜傥的诗人送别画. 此诗虽为惜别之作，却写得飘逸灵动，情深而不滞，意永而不悲，辞美而不浮，韵远而不虚. 意境辽阔，诗词优美的古诗词把学生们带入开阔浪漫的境界. 其中孤帆远影碧空尽唯见长江天际流的意思是江面上只有友人乘坐一艘船只，而友人的船只帆影也在渐渐的远去，消失在碧空的尽头，只看见一线长江，向遥远的天际奔流. 让同学们从诗词赏析的角度去理解“帆影”的意蕴，认识到其是一个随时间变化而趋于零的量，从而更进一步理解极限和无穷小的意义. 让学生体验古诗词文化，在抽象的数学概念学习中感受诗词文化的意境，培养文化自信.</p> <p>案例二 入若邪溪</p> <p>【南北朝】王籍</p>

舳舻何泛泛，空水共悠悠。

阴霞生远岫，阳景逐回流。

蝉噪林逾静，鸟鸣山更幽。

此地动归念，长年悲倦游。



诗人描写林静，不直接从“静”入手，而是从其反面“噪”下笔。用蝉的噪声反衬林之静描写山幽，不直接从“幽”入手，而是从其反面“鸣”下笔，有鸟的鸣叫反衬山之幽。噪与静、鸣与幽形成鲜明的对比，又构成和谐的统一，意境高远，富含哲理。

知识点

定义 1 如果函数 $f(x)$ 当 $x \rightarrow x_0$ (或 $x \rightarrow \infty$) 时的极限为零，那么称函数 $f(x)$ 为当 $x \rightarrow x_0$ (或 $x \rightarrow \infty$) 时的无穷小。

定义 2 设函数 $f(x)$ 在 x_0 的某一去心领域内有定义 (或 $|x|$ 大于某一正数时有定义)。如果对于任意给定的正数 M (不论它多么大)，总存在正数 δ (或正数 X)，只要 x 适合不等式 $0 < |x - x_0| < \delta$ (或 $|x| > X$) 时，对应的函数值 $f(x)$ 总满足不等式 $|f(x)| > M$ ，那么称函数 $f(x)$ 是当 $x \rightarrow x_0$ (或 $x \rightarrow \infty$) 时的无穷大，记为

$$\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = \infty \quad (\text{或} \quad \lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = \infty).$$

特别地，对于数列也有类似的定义。

如果对于任意给定的正数 M (不论它多么大)，总存在正整数 N ，使得当 $n > N$ 时，总有 $|x_n| > M$ ，则称数列 $\{x_n\}$ 为当 $n \rightarrow \infty$ 时的无穷大，记为 $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = \infty$ 。

下面我们考察等比数列 $\{q^n\} (q > 0)$ 当 $n \rightarrow \infty$ 时的极限。

直观上，我们不难发现：

$$\lim_{n \rightarrow \infty} q^n = \begin{cases} 0, & 0 < q < 1; \\ \infty, & q > 1. \end{cases}$$

从无穷大与无穷小的角度来看，可以表述为：

当 $0 < q < 1$ 时，等比数列 $\{q^n\}$ 为当 $n \rightarrow \infty$ 时的无穷小；

(2) 当 $q > 1$ 时，等比数列 $\{q^n\}$ 为当 $n \rightarrow \infty$ 时的无穷大.

$$1.01^{365} \approx 37.8, \lim_{n \rightarrow \infty} 1.01^n = +\infty,$$

$$0.99^{365} \approx 0.03, \lim_{n \rightarrow \infty} 0.99^n = 0.$$

【思政元素】如果一个人每天都在前一天的基础上进步 0.01 倍，与退步 0.01 倍，一年的时间足以让这个人大变样，并且这样的变化随着时间的增加而越来越大. 这也说明了：勤学如初起之苗，不见其增，日有所长；辍学如磨刀之石，不见其损，日有所亏！让学生清楚的认识到的做什么事情都要坚持不懈的努力，鼓励学生在奋斗中实现人生价值，升华人生境界. 公式虽小，但寓意深刻，引导同学们从今天开始每天在前一天的基础上努力一点点，并坚持下去，将会变得更优秀！

定理 1 在自变量的同一变化过程中，

(1) 如果 $f(x)$ 为无穷大，那么 $\frac{1}{f(x)}$ 为无穷小；

(2) 如果 $f(x)$ 为无穷小，且 $f(x) \neq 0$ ，那么 $\frac{1}{f(x)}$ 为无穷大.

【思政元素】1. 无穷大与无穷小看似对立，实则它们之间存在着密切的关系，在一定的条件下能够相互转化. 从而可以将无穷大的研究转换为无穷小的研究. 进而对培养学生的数学思维起到了很好的促进作用.

2. 引导学生学会通过现象看本质，无穷小并不等于一个很小的确定的常数，而是一个变量.

3. 任何事物都有两个不同的方面，它们既是相互区别、相互对立的，又是相互依赖、相互统一的. 引导同学们在今后的工作学习生活中，可以辩证的看待处理自己遇到的问题，多角度看问题、处理问题.

分析评价	<p>本案例通过介绍《黄鹤楼送孟浩然之广陵》和《入若邪溪》，在学习过程中，培养文化自信；通过介绍无穷小量与无穷大量的关系，引导同学们在今后的工作学习生活中，可以辩证的看待处理自己遇到的问题. 同时，让学生清楚的认识做什么事情都要坚持不懈的努力，鼓励学生在奋斗中实现人生价值，升华人生境界.</p>
评价者	<p>王晓 教授，商洛学院数学与计算机应用学院</p>

案例编号	20031101-007
案例标题	函数的连续性
案例来源	原创
内容简介	以函数连续性概念提出的历程为背景，联系古语：欲速则不达和著名的作家兼战地记者西华·莱德先生的经历，给出函数连续性的严格定义，使学生理解，掌握函数连续性的概念。
关键词	函数连续性定义；古语；战地记者经历
编写时间	2021-5-5
编著者	卢晶 商洛学院
素材形式	文字、图片等
育人主题	欲速则不达，做事情不能急于求成，工作学习更是如此，要想把事情做好，就得循序渐进，一步一个脚印，绝不能急于求成。
素材长度	1249
案例正文	<p>案例一 1856年，魏尔斯特拉斯开始在柏林大学授课，他发现当时普遍承认的有些定理是有问题的。例如，连续函数的傅里叶级数不一定收敛到它自身；柯西关于函数项级数可逐项积分的定理并不成立。对此，魏尔斯特拉斯认为有必要对分析学的基础加以系统的研究。于是，他回到有关极限的基础问题上，将柯西给出的描述性定义改进为现行的 $\varepsilon-\delta$ 定义。如果存在常数 L，对任意给定的正数 ε（不论它有多小），总存在正数 δ，使得当 $0 < x-a < \delta$ 时，恒有</p> $ f(x)-L < \varepsilon$ <p>成立，则称 L 为函数 $f(x)$ 当 $x \rightarrow a$ 时的极限，记作 $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = L$。魏尔斯特拉斯用不论多么小的正数 ε 刻画了函数 $f(x)$ 与常数 L 的接近程度，代替了柯西定义中的“要多小有多小”，用正数 δ 刻画了变量 x 与固定值 a 之间的距离，代替了柯西定义中的“无限趋近”。这个极限定义的核心落在了两个不等式上，是一个代数的而非几何的定义。运用这个极限定义，数学家可以严格地证明各种极限定理。魏尔斯特拉斯用 $\varepsilon-\delta$ 语言将柯西提出的连续函数的定义重新表述为：如果对任意给定的 ε（不论它有多小），总存在 $\delta > 0$，使得当 $x-a < \delta$ 时，恒有</p>

$$|f(x) - a| < \varepsilon$$

成立, 则称函数 $f(x)$ 在 a 点处连续. 与柯西不同的是, 魏尔斯特拉斯首先定义了函数在一点处的连续性, 然后指出如果函数在开区间上的每个点处都连续, 则函数在该开区间上连续, 如果函数在开区间的两个端点处单侧连续, 则函数在相应的闭区间上连续. 如果函数在一点处不连续, 则称这个点为间断点, 这正好反映了事物的“突变性”. 魏尔斯特拉斯关于函数连续性的定义沿用至今, 他定义中的 δ 同时依赖于 ε 和 a , 由于柯西当时并不完全清楚 δ 依赖于什么量, 这才导致他得出不正确的结果.

知识点

定义 1 (f 在点 x_0 连续) 设函数 f 在某 $U(x_0)$ 内有定义, 若

$$\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = f(x_0),$$

称函数 f 在点 x_0 连续.

函数在点 x_0 连续的要求是:

- ① $f(x)$ 在点 x_0 有定义;
- ② $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x)$ 存在;
- ③ $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = f(x_0)$.

定义 2 设函数 f 在点 $U_+(x_0)$ ($U_-(x_0)$ 内有定义), 若

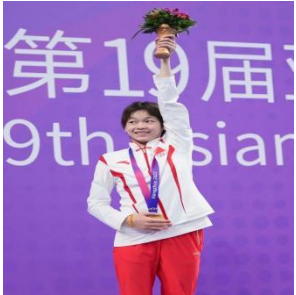
$$\lim_{x \rightarrow x_0^+} f(x) = f(x_0) \quad (\lim_{x \rightarrow x_0^-} f(x) = f(x_0)),$$

则称 f 在点 x_0 右 (左) 连续.

定理 函数 f 在点 x_0 连续 $\Leftrightarrow f$ 在点 x_0 既是右连续, 又是左连续.

【思政元素】任何科学理论的形成都要经历漫长的发展历程. 科学理论并非一成不变的, 一旦有了更好的解释, 旧理论就要修正. 启发学生学习过程中应具备质疑精神, 不断探索、发现新事物. 培养学生发现问题和提出问题的能力.

	<p>案例二 生活中，很多事物的变化都是连续的，像植物的生长、气温的变化、知识的积累，不能急于求成，必须遵循它原本的规律。</p> <p>【思政元素】古语：欲速则不达，做事情不能急于求成，工作学习更是如此，要想把事情做好，就得循序渐进，一步一个脚印，绝不能急于求成。知识的积累是需要时间和付出持久不懈的努力的，妄图寻求捷径的想法是不科学的，只能事与愿违。</p> <p>案例三 西华·莱德先生是个著名的作家兼战地记者，他曾在1957年4月的《读者文摘》上撰文表示，他所收到的最好的忠告是“继续走完下一里路”。</p> <p>在第二次世界大战期间，西华·莱德跟几个人不得不从一架破损的运输机上跳伞逃生，结果迫降到缅甸、印度交界处的树林里，如果要等救援队援救，至少要好几个星期，那时可能就来不及了，只好自己设法逃生。当时，他们唯一能做的就是拖着沉重的步伐往印度走，全程长达140里，必须在8月的酷热和季风所带来的暴雨的双重侵害下，翻山越岭、长途跋涉。才走了一个小时，西华·莱德的一只长筒靴的鞋钉刺到另一只脚上，傍晚时双脚都起泡出血，像硬币那般大小，看着布满伤痕的双脚，他开始怀疑自己是否能一瘸一拐地走完140里，他真的觉得自己快完蛋了，但却别无选择，只能硬着头皮走下一里……。幸运的是，他们最后逃生成功，平安回国。</p> <p>【思政元素】生活中，无论遇到多大困难，心中的那盏希望之灯都不能熄灭，脚踏实地，只要继续走完下一里路就会取得成功。</p>
分析评价	<p>案例一介绍了函数连续性的发展历程，使学生认识到实践是检验整理的唯一标准，启发学生学习中应具备质疑、求真务实的精神。</p> <p>案例二启发学生做事应持之以恒，才有可能取得成功。使学生感受到无论遇到多大的困难，都应对生活抱有希望，坚持不懈，才能取得成功。案例三从战地记者的亲身经历，使学生感受到不管遇到多大困难，都应对生活抱有希望，坚持到底才能胜利。</p>
评价者	王念良 教授 商洛学院数学与计算机应用学院

案例编号	20031101-008
案例标题	函数的连续性与间断点
案例来源	原创
内容简介	以中国小将全红婵满分创造女子 10 米跳台历史最高分纪录故事为导入，通过多媒体的方式放映出来，并描绘其跳水的轨迹；用多媒体展示一个人的一生，从出生一直到老去的过程，给出函数连续性和间断点的定义，并分析间断点的类型，使学生掌握间断点的分类，并会判断间断点的类型.
关键词	全红婵；人的一生；函数的连续性与间断点
编写时间	2021-5-7
编著者	卢晶 商洛学院
素材形式	文字、图片等
育人主题	感受到运动员们在赛场上的拼搏精神，不到最后一刻不放弃的顽强不息的精神.尊重生命，尊重时间，把握当下，建立良好的心理防线，树立正确的价值观，不管遇到什么问题都不要走极端，努力认真快乐的度过每一天.
素材长度	1249
案例正文	<p>案例一 在东京奥运会上，中国小将全红婵以五跳三跳满分创造女子 10 米跳台历史最高分纪录，夺得 2020 东京奥运会跳水女子单人 10 米跳台冠军。在引入课程时，可以将全红婵跳水的视频通过多媒体的方式放映出来，并将其跳水的轨迹描绘出来，让学生直观的感受什么叫连续。</p>  <p>【思政元素】 增加学生们的民族自豪感，让学生切实感受到“更快、更高、更强”的奥运精神，感受到运动员们在赛场上的拼搏精神，不到最后一刻不放弃的顽强不息的精神。</p> <p>案例二 用多媒体展示一个人的一生，从出生一直到老去的过程，告诉学生时间是连续的，生命是连续的，人的一生就是一个不断前进的过程，过去不必后悔，未来还在继续，把握当下，珍惜大学期间的美好时光，不要让任何不必要的人和事物、任何不好的习惯成为打破你美好校园生活的“间断点”.同样，在人生这条连续的曲线中，没有人会一直向上，也没有人会一直下跌，起起落落是人生的常态，不管遇到什么境遇，生命都是人生中最宝贵的，生命一旦出现“间断点”，人生便不会再有连续的可能了.</p>

	<p>知识点 定义 设函数 f 在某 $U^0(x_0)$ 内有定义, 若 f 在点 x_0 无定义, 或 f 在点 x_0 有定义而极限不存在, 则称点 x_0 为函数 f 的间断点或不连续点.</p> <p>由上述分析可见, 若 x_0 为函数 f 的间断点, 则必出现下列情形之一:</p> <p>① $f(x)$ 在点 x_0 无定义; ② $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x)$ 不存在; ③ $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) \neq f(x_0)$.</p> <p>间断点分类 第一类间断点, 其特点的函数在该点处的左、右极限都存在.</p> <p>可去间断点 若 $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = A$, 而 f 在点 x_0 无定义, 或有定义但 $f(x_0) \neq A$, 则称 x_0 为 f 的可去间断点.</p> <p>跳跃间断点 若 $\lim_{x \rightarrow x_0^+} f(x), \lim_{x \rightarrow x_0^-} f(x)$ 存在, 但</p> $f(x_0 - 0) \neq f(x_0 + 0),$ <p>则称点 x_0 为函数 f 的跳跃间断点.</p> <p>第二类间断点 函数的所有其它形式的间断点 (即使称函数至少有一侧极限不存在的点) 称为函数的第二类间断点.</p> <p>【思政元素】 通过生命曲线以及观察人的一生的影像资料, 告诫学生生命的重要, 时间的宝贵. 尊重生命, 尊重时间, 把握当下, 建立良好的心理防线, 树立正确的价值观, 不管遇到什么问题都不要走极端, 努力认真快乐的度过每一天.</p>
分析评价	<p>通过研究运动员的运动轨迹, 用更加直观的视觉效果让学生感受到函数连续的概念; 引导学生感悟生命的宝贵, 珍惜时间, 把握当下, 过好每一天, 达到了育人的目的.</p>
评价者	王念良 教授 商洛学院数学与计算机应用学院

案例编号	20031101-009
案例标题	导数及其应用
案例来源	原创
内容简介	研究罐头外壳设计，体积固定的情况下他讨论如何设计使得成本最小，并分析圆柱半径和高有微小变化时，对体积的影响；介绍我国高铁平均时速和里程数，抛出问题：高铁的瞬时速度是多少？给出函数导数的概念，使学生掌握导数的定义，并理解导数的物理意义.
关键词	导数；外观设计；高铁
编写时间	2021-5-10
编著者	卢晶 商洛学院
素材形式	文字、图片等
育人主题	通过建立数学模型解决实际问题，使学生提高了运用数学知识处理现实世界中各种复杂问题的意识、信念和能力. 高铁时速的提升，使学生增强民族自豪感，感受到国家科学技术的进步.
素材长度	1249
案例正文	<p>案例一 从15世纪初文艺复兴时期起，欧洲的工业、农业、航海事业与商贾贸易得到大规模的发展，形成了一个新的经济时代。而十六世纪的欧洲，正处在资本主义萌芽时期，生产力得到了很大的发展。生产实践的发展对自然科学提出了新的课题，迫切要求力学、天文学等基础科学的发展，而这些学科都是深刻依赖于数学的，因而也推动了数学的发展。在各类学科对数学提出的种种要求中，下列三类问题导致了微分学的产生：</p> <p>(1) 求变速运动的瞬时速度；</p> <p>(2) 求曲线上一点处的切线；</p> <p>(3) 求最大值和最小值。</p> <p>案例二 罐头外壳的设计. 日常生活中罐装食品很多，如饮料，调味品，熟食等，体积相同的罐头可做成尺寸不同的形状，下面两个例题从成本或视觉的角度来探讨罐头的外壳设计问题。</p> <p>例 用铝皮来做容积为 $1\,000\text{ cm}^3$ 的圆柱形罐头外壳，假设上、下底面每平方厘米价格为 0.03 元，侧面每平方厘米价格需要花费 0.02 元，问该罐头的半径和高各为多少时成本最小？</p> <p>例 设有一个半径为 2.5 cm，高为 12.5 cm 的圆柱形罐头外壳，当其半径 r 有微小改变量 Δr 或者高 h 有微小改变量 Δh 时，都会引起</p>

容积 $V = \pi r^2 h$ 产生相应的改变量. 试比较体积 V 对半径 r 和高 h 微小变化的敏感度.

计算结果显示半径的变化造成体积的变化要比高的变化造成体积的变化约敏感 10 倍, 也就是说, 当半径有微小减少时, 必须使高明显地增加, 才能保持容积不变. 因此, 将一个罐头的外壳的半径取比标准高一些, 小得使人不易注意到, 而增加高度使容积保持不变, 可使人感到容积比原来标准大了很多, 这也是将啤酒罐做的又细又高的原因, 当然, 将它做得又细又高也便于握持.

知识点 函数的近似计算

$$\Delta y = f'(x_0)\Delta x + o(\Delta x)$$

当 Δx 很小时, $\Delta y \approx dy$, $f(x) \approx f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0)$.

【思政元素】 了解和领会由实际需要出发, 到建立数学模型, 再到解决实际问题的全过程; 提高他们运用数学知识处理现实世界中各种复杂问题的意识、信念和能力.

案例三 高速铁路, 简称高铁, 是指设计标准等级高、可供列车安全高速行驶的铁路系统, 其平均速度为 250km/h 至 350km/h, 到 2019 年年底, 中国铁路运行里程达到



13.9 万公里以上, 其中高铁 3.5 万公里, 居世界第一位, 占世界高铁总里程的 60% 以上, 中国高铁跑出了中国速度, 创造了中国奇迹, 那么, 高铁在运行过程中某一时刻的瞬时速度是多少呢?

知识点 1. 瞬时速度 设一质点作直线运动, 其规律为 $s = s(t)$,

若 t_0 为某一确定时刻, t 为邻近于 t_0 的时刻, 则 $\bar{v} = \frac{s(t) - s(t_0)}{t - t_0}$ 是质点

在时间段 $[t_0, t]$ 上的平均速度. 若 $t \rightarrow t_0$ 时的平均速度 \bar{v} 的极限存在,

则称极限 $v = \lim_{t \rightarrow t_0} \frac{s(t) - s(t_0)}{t - t_0}$ 为质点在 t_0 时的瞬时速度.

	<p>2. 定义 设函数 $f(x)$ 在点 x_0 的某邻域内有定义, 若极限</p> $\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$ <p>存在, 则称函数 $f(x)$ 在点 x_0 可导, 并称此极限为函数 $f(x)$ 在点 x_0 的导数, 记作 $f'(x_0)$.</p> <p>数也是函数增量 Δy 与自变量增量 Δx 之比的极限, 也称这个增量之比为函数关于自变量的平均变化率(磋商), $f'(x_0)$ 为函数 $f(x)$ 在点 x_0 处关于 x 的变化率.</p> <p>【思政元素】1. 通过引入高铁的瞬时问题, 既可以导入经典问题, 激起学生的思维火花, 同时也可顺势引出我国的高铁发展现状, 增强学生对我们国家的认同感, 让学生体会到生活在中国所拥有的幸福感和自豪感, 激发学生的爱国情怀.</p> <p>2. 唯物辩证法认为: “世界是物质的; 物质是运动变化的物质的运动变化是有规律的.” 任何事物的变化都是由量变到质变的过程, 量变到一定程度引起质变, 产生新质. 质变量变规律揭示事物发展的形式和形态, 指导我们的实践.</p>
分析评价	<p>在进行导数概念的教学时, 既要注重传统意义上概念的引入、形成、计算和应用, 也要注重在教学过程中植入数学文化的元素; 既要围绕数学学科的核心素养进行设计, 也要隐含正确的价值观和必备的品格要素, 把课程思政的元素自然巧妙地融入课程内容, 达到教书育人的目的.</p>
评价者	王念良 教授 商洛学院数学与计算机应用学院

案例编号	20031101-010
案例标题	微分
案例来源	原创
内容简介	以平面薄片面积受温度变化的影响为例，引出函数微分的定义，并介绍微分在近似计算中的应用，包括函数的近似计算和工程近似计算问题.
关键词	平面薄片的面积；微分；近似计算
编写时间	2021-5-20
编著者	卢晶 商洛学院
素材形式	文字、图片等
育人主题	差之毫厘，谬以千里.在生活中处理一些非常复杂的问题，也可以采用微分的思想，集中力量找出主要矛盾，从而找到解决复杂问题的关键.
素材长度	956
案例正文	<p>案例一 失之毫厘，谬以千里. 勿以善小而不为，勿以恶小而为之.</p> <p>案例二 微积分是微分学和积分学的统称，它是由牛顿和莱布尼兹共同创立的，但是两人的研究入手方向是不同的，牛顿的研究始于对任意曲线切线问题，而莱布尼兹研究方向是求积问题，即计算不规则区域的面积，所以牛顿是先有微分再有积分，莱布尼兹先有积分后有微分，虽然入手方向不同，但是殊途同归，最终形成了微积分体系.</p> <p>案例三 由于全球信息化的快速发展，经济水平的不断提升，微积分在经济学中的作用日渐显著.经济学问题通常较为复杂和抽象，应用微积分思想可巧妙地把问题具体化、简单化，为经济问题的解决提供准确的数据理论，为经济决策提供科学的分析方法在进行最优化决策时，对经济问题进行预测、分析、实现经济资源的优化配置，如何保障经济决策的科学性、严谨性.当经济学领域常涉及到成本最小化、利润最大化等问题，仅仅依靠以往的经验，经济决策将缺乏科学性，抓住问题的关键因素，避免干扰因素的影响.</p>



案例三 一块正方形金属薄片受温度变化的影响,其边长由 x_0 变到 $x_0 + \Delta x$, 问此薄片的面积改变了多少?

设此薄片的边长为 x , 面积为 A , 则 A 与 x 存在函数关系:
 $A = x^2$. 薄片受温度变化的影响面积的改变量可以看作是当自变量 x 自 x_0 取得增量 Δx 时, 函数 $A = x^2$ 相应的增量 ΔA , 即

$$\Delta A = (x_0 + \Delta x)^2 - x_0^2 = 2x_0\Delta x + (\Delta x)^2.$$

知识点

定义 设函数 $y = f(x)$ 在某区间内有定义, x_0 及 $x_0 + \Delta x$ 在这区间内, 如果函数的增量 $\Delta y = f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)$ 可表示为

$$\Delta y = A\Delta x + o(\Delta x),$$

其中 A 是不依赖于 Δx 的常数, 那么称函数 $y = f(x)$ 在点 x_0 是可微的, 而 $A\Delta x$ 叫函数 $y = f(x)$ 在点 x_0 相应于自变量增量 Δx 的微分, 记作 dy , 即 $dy = A\Delta x$.

例 有一批半径为 1cm 的球, 为了提高球面的光洁度, 要镀上一层铜, 厚度为 0.01cm. 估计一下每只球需要用铜多少克 (铜的密度是 8.9g/cm³)?

知识点 微分在近似计算中的应用 如果函数 $y = f(x)$ 在点 x_0 处的导数 $f'(x_0) \neq 0$, 且 $|\Delta x|$ 很小时, 有


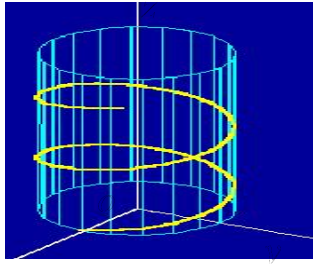

$$\Delta y = f(x_0 + \Delta x) - f(x_0) \approx f'(x_0)\Delta x,$$

令 $x = x_0 + \Delta x, \Delta x = x - x_0$, 那么 $f(x) \approx f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0)$.

【思政元素】 1.辩证法: 处理一些非常复杂的问题时, 也可以采用微分的思想, 集中力量找出主要矛盾, 从而找到解决复杂问题的关键;

2.在学习生活中, 要从源头上消除偏差, 防止造成失之毫厘,

	<p>谬以千里的后果；</p> <p>3.微分是指函数的增量无限趋近于 0，割线无限趋近于切线，曲线无限趋近于直线，从而以直代曲，以线性化的方法解决非线性问题，这是微分学理论的精髓所在.</p>
分析评价	<p>利用平面薄片面积增量问题给出了微分的定义，利用微分可以解决函数的近似计算及一些工程计算问题，通过微分的学习可以培养学生学语言抽象能力、逻辑推理能力及分析问题和解决问题的能力.</p>
评价者	王念良 教授 商洛学院数学与计算机应用学院

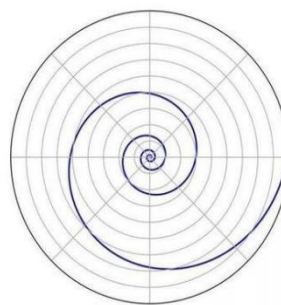
案例编号	20031101-011
案例标题	空间曲线及其方程
案例来源	原创
内容简介	介绍平头螺丝钉，植物中的对数螺旋线现象，给出空间曲线方程的概念，使学生掌握空间曲线及其方程.
关键词	螺丝钉；对数螺旋线；空间曲线及其方程
编写时间	2023-5-25
编著者	卢晶 商洛学院
素材形式	文字、图片等
育人主题	善于发现事物中的真、善、美，培养学生对待科学的严谨态度，努力学习科学知识，为国做贡献，激发爱国热情.
素材长度	815
案例正文	<p>案例一 平头螺丝钉——圆柱螺旋线.</p> <p>知识点 如果空间一点 M 在圆柱</p> $x^2 + y^2 = a^2$ <p>上以角速度 ω 绕 z 轴旋转，同时以线速度 v 沿平行于 z 轴的正方向上升，那么点 M 构成的图形叫做螺旋线。如图所示，螺旋线的参数方程为：</p> $\begin{cases} x = a \cos \omega t \\ y = a \sin \omega t \\ z = vt \end{cases}$ <p>螺旋线是实践中常用的曲线，平头螺丝钉的外缘曲线就是螺旋线，当我们拧紧平头螺丝钉时，它的外缘曲线上的任一点 M，一方面绕螺丝钉的轴旋转，另一方面又沿平行于轴线的方向前进，点 M 就走出了一段螺旋线。</p> <p>案例二 植物中的对数螺旋线现象</p> <p>向日葵花盘上瘦果的排列，松树球果上果鳞的布局，菠萝果实上的分块，都是按照对数螺旋线在空间展开的。向日葵</p>   

花盘上瘦果的对数螺旋线的弧形排列，产生后代的效率也最高。

知识点 对数螺旋线极坐标系下方程

$r = e^{a\theta}$ ，直角坐标系方程

$$x + y = e^{\frac{\pi}{2}}$$




【思政元素】 善于发现事物中蕴含的数学元素，感受数学无处不在. 通过螺旋线实例引入内容，培养学生对待科学的严谨态度，努力学习科学知识, 培养学生善于观察、善于思考的良好习惯.

案例三 勒奈·笛卡尔（Rene Descartes）, 1596年3月31日生于法国都兰城. 笛卡尔是伟大的哲学家、物理学家、数学家、生理学家, 解析几何的创始人. 笛卡尔是欧洲近代资产阶级哲学的奠基人之一，黑格尔称他为“现代哲学之父”. 他自成体系，熔唯物主义与唯心主义于一炉，在哲学史上产生了深远的影响. 同时，他又是一位勇于探索的科学家，他所建立的解析几何在数学史上具有划时代的意义. 他的普遍方法的一个最成功的例子，是笛卡尔运用代数的方法的来解决几何问题，确立了坐标几何学即解析几何学的基础. 笛卡尔的方法论中还有两点值得注意. 第一，他善于运用直观“模型”来说明物理现象. 例如利用“网球”模型说明光的折射；用“盲人的手杖”来形象地比喻光信息沿物质作瞬时传输；用盛水的玻璃球来模拟并成功地解释了虹霓现象等. 第二，他提倡运用假设和假说的方法，如宇宙结构论中的旋涡说.

【思政元素】 通过数学家笛卡尔的生平事迹介绍，使学生认识到要学习科学家善于思考，多方面发展，努力为国家做贡献.

分析评价	通过螺旋线实例引入内容，培养学生对待科学的严谨态度，努力学习科学知识，为国做贡献，激发爱国热情；通过数学家笛卡尔的生平事迹介绍，使学生认识到要学习科学家善于思考，多方面发展，努力为国家做贡献.
评价者	王念良 教授 商洛学院数学与计算机应用学院

案例编号	20031101-012
案例标题	微分中值定理
案例来源	原创
内容简介	通过数学学科在国家发展中的战略地位之于微分中值定理在《数学分析》课程中的重要意义，引发学生对中值定理的好奇心，对罗尔、拉格朗日等数学家的敬佩，激发学生对本堂课的学习兴趣。本节课主要通过对罗尔定理、拉格朗日中值定理内容的学习，严谨证明，培养学生应用微分中值定理解决较复杂数学问题的能力。
关键词	微分中值定理；罗尔定理；拉格朗日中值定理
编写时间	2024-3-16
编著者	王瑞 商洛学院
素材形式	文字、图片等
育人主题	培养和提升学生政治认同感，厚植家国情怀；时刻具备责任意识和大局意识，为中华民族繁荣昌盛而贡献自己的力量，从自身出发，努力学习；从点滴入手，从当下开始。
素材长度	1505
案例正文	<p>案例一 17-19 世纪英国、德国、法国，既是欧洲的强国，也是数学强国. 英国数学家牛顿、德国数学家莱布尼茨发明了微积分，法国数学家拉格朗日、柯西等丰富和完善了微积分，解决了许多力学、天体学、几何学上的难题. 19 世纪，俄罗斯数学开始崛起，到了 20 世纪，苏联成为世界上数学强国之一，特别是 1958 年苏联成功发射了第一颗人造地球卫星，轰动了全世界，当时美国总统肯尼迪了解到苏联成功发射卫星的原因之一，是苏联在卫星发射相关的数学领域处于世界领先地位，此外苏联重视数学教育，为基础科学研究提供了雄厚的研究基础. 于是肯尼迪下令大力发展数学. 二战以后，美国逐渐从数学落后的状态发展成今天的数学超级大国，得益于对数学的重视. 二战前，德国纳粹排斥犹太人，大批欧洲犹太籍数学家（当然也有其他国籍的数学家）移居美国，使得美国迅速成为一个数学强国，尤其是原子弹的研发，为美国打赢二战、提升战后经济实力做了巨大贡献，后来苏联解体、东欧解体后，美国又抓紧时</p> <p>数学与自然科学、社会科学、信息科学、医疗科学 ...</p> 

机吸纳了其中大批优秀数学家，从以上世界格局、国家发展史足以看出，数学学科的战略地位。

知识点 微分中值定理，是一系列中值定理的总称，包括罗尔定理、拉格朗日定理、柯西定理等，是研究函数的有力工具，反映了导数的局部性与函数的整体性之间的关系。其中，拉格朗日定理是最重要的内容，可以说其他中值定理都是拉格朗日中值定理的特殊情况或推广。



米歇尔·罗尔 (1652年4月21日-1719年11月8日)，法国数学家。著有罗尔定理 (1691年)。



约瑟夫·拉格朗日 (1736~1813)，法国著名数学家、物理学家。他在数学、力学和天文学三个学科领域都有历史性的贡献，其中尤以数学方面的成就最为突出。



柯西 (1789—1857)，法国数学家、物理学家、天文学家。在数学领域有很高的建树和造诣。很多数学定理和公式都以他的名字命名，如柯西不等式、柯西中值定理。

【思政元素】 1. 培养学生的政治认同感，厚植家国情怀。厚植家国情怀是我们每个公民的责任和使命，筑梦制造强国，需要全体国民的共同努力和奉献，讲述科教兴国的点点滴滴，培养学生用实际行动来践行爱国主义精神，为国家的繁荣贡献个人力量，鼓励学生从扮演好当下我们每个人角色，从一点一滴的小事做起，端正态度，好好学习，立志高远。

2. 培养学生的辩证思维和创新意识。通过引导学生从不同角度思考问题、运用数学方法解决实际问题等方式，培养学生的辩证思维 and 创新能力。通过让学生联系前后所学，在实践中探索、发现和创新，进一步提升学生的综合素质。

知识点

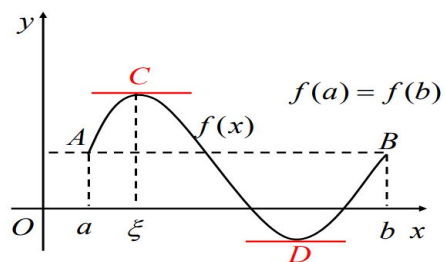
定理 6.1 (罗尔 (Rolle) 中值定理) 若函数 f 满足如下条件:

- (1) f 在闭区间 $[a, b]$ 上连续;
- (2) f 在开区间 (a, b) 上可导;
- (3) $f(a) = f(b)$,

则在 (a, b) 上至少存在一点 ξ ，使得

$$f'(\xi) = 0.$$

罗尔定理的几何意义：在每一点都可导的一段连续曲线上，如果曲线的两端点高度相同，则至少存在一条水平切线。



【思政元素】 1. 应用“数形结合”，训练迁移思维能力. 培养学生“数形结合”的好习惯，提高数学思维能力和转化能力，达到数形统一.

2. 利用“数形结合”，作为数学问题的解答方法，能最直接揭示问题的本质，直观的看到问题的结果，只需稍加计算或推导，就能得到问题的答案. 通过一些典型题目最佳解法的寻求，增强“求新、求异”意识，能激发“不甘满足，勇于创新”的激情.

例 1 设 f 为 R 上的可导函数，证明：若方程 $f'(x) = 0$ 没有实根，则方程 $f(x) = 0$ 至多只有一个实根.

定理 6.2（拉格朗日（Lagrange）中值定理）若函数 f 满足如下条件：

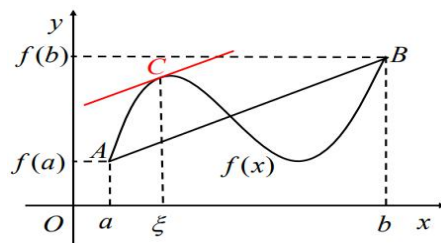
- (1) f 在闭区间 $[a, b]$ 上连续；
- (2) f 在开区间 (a, b) 上可导；

则在 (a, b) 上至少存在一点 ξ ，使得 $f'(\xi) = \frac{f(b) - f(a)}{b - a}$.

显然，特别当 $f(a) = f(b)$ 时本定理的结论即为罗尔定理的结论.

这表明罗尔定理是拉格朗日中值定理的一个特殊情况.


拉格朗日中值定理的几何意义：



【思政元素】 “以数辅形”、

“以形助数”的数形结合思想，具有可以使问题直观呈现的优点，有利于加深对知识的“识记和理解”，将复杂的代数问题赋予灵活

	<p>变通的形式；在解答数学题时，数形结合，有利于分析题中数量之间的关系，丰富表象，引发联想，启迪思维，拓宽思路，迅速找到解决问题的方法，从而提高“分析问题和解决问题”的能力和迁移思维能力.</p> <p>知识点 1. $f(b) - f(a) = f'(\xi)(b - a), a < \xi < b.$</p> <p>2. $f(x + \Delta x) - f(x) = f'(\xi)\Delta x, \xi$介于$x$与$x + \Delta x$之间.</p> <p>【思政元素】通过等价形式的展示，举一反三，可以锻炼思维，加深对所学知识的理解和掌握，帮助建立更稳固的知识体系，增强逻辑思维能力，提升解决问题的能力.</p>
分析评价	<p>本案例通过罗尔定理引入拉格朗日中值定理，在介绍罗尔、拉格朗日两位数学家的过程中完成了对他们定理内容的学习，通过数形结合的方式充分了解定理所述内容，引导学生提高政治认同感，厚植家国情怀，从一点一滴的小事做起，从做好本职分内之事做起，好好学习，科教兴国.</p>
评价者	王念良 教授 商洛学院数学与计算机应用学院

案例编号	20031101-013	
案例标题	洛必达法则	
案例来源	原创	
内容简介	洛必达法则是微分学的一个重要定理，是求解未定型极限的有效方法之一。通过洛必达和伯努利曲折的故事，吸引学生专注课堂，学习知识要点，同时也使学生认识到才能与专注是成就热爱与事业的不二法宝。	
关键词	洛必达法则	
编写时间	2024-5-25	
编著者	王瑞 商洛学院	
素材形式	文字、图片等	
育人主题	脚踏实地、认真学习，勤奋努力、用坚持成就梦想。	
素材长度	1297	
案例正文	<p>案例一 提起高数，很多大学生都会闻风丧胆，而高数最“闻名遐迩”的便是洛必达法则，有些老师为了唤醒在高数课上懵逼的学生，会讲起洛必达法则背后的故事。</p> <p>洛必达是法国中世纪的王公贵族，早年就显露出数学才能。后因痴迷数学，他拜约翰·伯努利为师。但是洛必达在投身痴迷的数学领域之后并没有太大建树。洛必达希望自己像那些数学大师一样能留名青史。于是他给他的老师约翰·伯努利修书一封：很清楚，我们互相有对方想要的东西。我在财力上帮助你，你在才智上帮助我。约翰·伯努利收到信，震惊之后还是接受了（这时的约翰·伯努利正需用钱）。于是他回信接受了这个提议，开始定期将自己的研究发现邮寄给洛必达。洛必达将这些研究结果细心钻研，学习并将它们整理起来。之后洛必达出版了一本书，记载了洛必达法则。洛必达凭借洛必达法则，一炮而红，受足了人们的拥戴，甚至还被推举进法国科学院。</p> <p>让我们来算一笔账，洛必达当时用三百个里弗尔买来的洛必达法则一里弗尔相当于一磅银子，一磅等于 0.4536 公斤(kg)，据 2019.11.21 市价白银 3.89 元一克</p> $300 \times 1 \times 0.4536 \times 1000 \times 3.89 = 529351.2 \text{ 元}$	

也就是说，伯努利因为 53 万失去了一生的荣誉. 事实上，科研成果本来就可以买卖，洛必达也确实是个有天分的数学学习者，只是比伯努利等人稍逊一筹. 洛必达花费了大量的时间精力

整理这些买来的和自己研究出来的成果，编著出世界上第一本微积分教科书，使数学广为传播. 并且他在此书前言中，向莱布尼兹和伯努利郑重致谢，特别是约翰·伯努利. 这是一个值得尊敬的学者和传播者，他为这项事业贡献了自己的一生.

知识点 在之前的学习中遇到过这样一类求极限问题：分子分母都是无穷小或都是无穷大时，两个函数之比的极限，可能存在也可能不存在，即使极限存在也不能用“商的极限等于极限的商”这一运算法则. 这种求极限的式子称为未定式，记为 $\frac{0}{0}$ 或 $\frac{\infty}{\infty}$.

计算上述未定式极限的方法称为洛必达法则（有的教科书称为罗比塔法则），是利用导数来计算具有不定型的极限的方法. 该法则以法国数学家纪尧姆·德·洛必达的名字命名，但实际上是由瑞士数学家约翰·伯努利所发现，因此也被叫做伯努利法则.

一、 $\frac{0}{0}$ 、 $\frac{\infty}{\infty}$ 型未定式的极限

定理 1 设函数 $f(x)$ 与 $g(x)$ 满足

- (1) 当 $x \rightarrow a$ 时，函数 $f(x)$ 与 $g(x)$ 都趋于零；
- (2) 在点 a 的某去心邻域内， $f'(x)$ 及 $g'(x)$ 都存在且 $g'(x) \neq 0$ ；
- (3) $\lim_{x \rightarrow a} \frac{f'(x)}{g'(x)}$ 存在（或为无穷大）；


那么，
$$\lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x \rightarrow a} \frac{f'(x)}{g'(x)}.$$

定义 1 这种在一定条件下通过分子分母分别求导再求极限来确定未定式的值的方法称为洛必达法则.

注 1. 定理的条件：分子分母都是无穷小；分子分母都可导，且分母的导数不等于 0；导数之比的极限存在或为 ∞ ；

2. 定理的结论：函数之比的极限等于导数之比的极限；

	<p>3. 若 $\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f'(x)}{g'(x)}$ 还是未定式, 且 $f'(x), g'(x)$ 满足定理中对 $f(x), g(x)$ 所要求的条件, 则可以继续使用罗必塔法则, 直到不再是未定式为止, 即</p> $\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f'(x)}{g'(x)} = \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f''(x)}{g''(x)} = \dots$ <p>定理 2 如果函数 $f(x)$ 与 $g(x)$ 满足:</p> <p>(1) $\lim f(x) = 0$ 且 $\lim g(x) = 0$ (或 $\lim f(x) = \infty$ 且 $\lim g(x) = \infty$)</p> <p>(2) $f'(x)$ 及 $g'(x)$ 都存在, 且 $g'(x) \neq 0$; (3) $\lim \frac{f'(x)}{g'(x)} = A$;</p> <p>那么 $\lim \frac{f(x)}{g(x)} = \lim \frac{f'(x)}{g'(x)} = A$.</p> <p>【思政元素】洛必达法则是微分学的一个重要定理, 是求解未定型极限的有效方法之一. 这一方法主要运用于分数形式的未定型极限的计算, 但在具体求解过程中需要对具体问题具体分析, 判断其是否满足洛必达法则的运算条件. 通过洛必达和伯努利故事, 可以使学生看见洛必达醉心数学研究的痴迷, 以及时代环境诸多因素下伯努利做出的人生选择, 桩桩件件促成了而今的“洛必达法则”, 向学生展示了选择的重要性, 更重要的是才能与专注是成就热爱与事业的不二法宝. 可以启发学生脚踏实地、认真学习, 勤奋努力、用坚持成就梦想.</p>
分析评价	<p>洛必达法则是微分学的一个重要定理, 是求解未定型极限的有效方法之一. 通过洛必达和伯努利故事, 使学生认识到才能与专注是成就热爱与事业的不二法宝. 可以启发学生脚踏实地、认真学习, 勤奋努力、用坚持成就梦想.</p>
评价者	王念良 教授 商洛学院数学与计算机应用学院

案例编号	20031101-014
案例标题	泰勒公式
案例来源	原创
内容简介	通过创设活跃、和谐、民主、平等、欢乐的课堂氛围，使得学生潜能、创造性、积极健康的人生态度生长发展，通过数学家小故事，引发学生对内容的好奇心和探索欲，引出本节内容——泰勒公式. 通过对泰勒定理出现意义的阐述，和学生一起探索、给出泰勒公式，使学生体会泰勒公式的实际应用价值.
关键词	泰勒公式；佩亚诺型余项；麦克劳林公式
编写时间	2024-3-9
编著者	王瑞 商洛学院
素材形式	文字、图片等
育人主题	感知人类命运共同体的密切关系，了解和认识世界文化瑰宝，积极吸纳，洋为中用，取其精华，不断成长. 同时传递数学家职业素养，追求极致、一丝不苟，精益求精、不断创新的科学家精神也是我们前进路上的明灯和努力的方向.
素材长度	858
案例正文	<p>案例一 数学家故事 照片上这个男人，名叫伊格·塔姆（1885-1971），他被泰勒展式救过命！家住乌克兰敖德萨（Odessa）的塔姆，是一名大学教授。</p>  <p>十月革命期间，粮食短缺，塔姆也饿得发慌. 他拿上几件名贵银餐具，到乡下换吃的，结果被白匪逮捕. 土匪头子是一个满脸横肉的络腮胡子，胸前挂着机枪子弹袋，腰上别着手榴弹. “老实交代，你是不是反乌克兰的共党分子？一枪崩了你！”. 塔姆头摇的跟拨浪鼓似的：“唔……误会误会！我只是个大学里教数学的.” 匪首听到“数学”，随手在地上写了个式子，然后拿枪顶住他脑门，手指扣着扳机，冷冷地说：“把这个用泰勒展开，并估计余项误差. 做对了，你回家；做错了，崩了你！”塔姆在枪口下，蹲在地上满头大汗奋笔疾书. 不一会儿匪首看了看答案，“嗯”了一声，又看了看过程，挥挥手枪，让他离开.</p> <p>正所谓：大难不死，必有后福. 逃出生天的塔姆，潜心学术，后来在 1958 年获得诺贝尔物理学奖. 塔姆人生中多次谈及土匪头子，不</p>

知其何许人也，也许只是尘世中一个迷途小书童。

塔姆教授的人生经历告诉我们这样一个道理：“谁说数学不实用，关键时候能救命！”而搭救塔姆命的泰勒展式，就是我们今天要介绍的内容。掌握它，有可能将来考场上救你一命！

知识点 问题：设函数 $f(x)$ 在 x_0 处 n 阶可导，试找出一个关于 $(x-x_0)$ 的 n 次多项式

$$p_n(x) = a_0 + a_1(x-x_0) + a_2(x-x_0)^2 + \cdots + a_n(x-x_0)^n$$

近似表达 $f(x)$ ，要求使得 $p_n(x)$ 与 $f(x)$ 之差是当 $x \rightarrow x_0$ 时比 $(x-x_0)^n$ 高阶的无穷小。

定理 6.9 若函数 f 在点 x_0 存在直至 n 阶导数，则有

$$f(x) = T_n(x) + o((x-x_0)^n),$$

即

$$f(x) = f(x_0) + f'(x_0)(x-x_0) + \frac{f''(x_0)}{2!}(x-x_0)^2 + \cdots + \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x-x_0)^n + o((x-x_0)^n).$$

上式称为函数 f 在点 x_0 的泰勒公式， $R_n(x) = f(x) - T_n(x)$ 称为泰勒公式的余项，形如 $R_n(x) = o((x-x_0)^n)$ 的余项称为佩亚诺（Peano）型余项，所以上式又称为带有佩亚诺型余项的泰勒公式。

在上式中取 $x_0 = 0$ 得：


$$f(x) = f(0) + f'(0)x + \frac{f''(0)}{2!}x^2 + \cdots + \frac{f^{(n)}(0)}{n!}x^n + o(x^n).$$

称为带有佩亚诺余项的麦克劳林（Maclaurin）公式。

【思政元素】1. 活跃、和谐、民主、平等、欢乐的课堂氛围是学生潜能、创造性、积极健康的人生态度生长发展的“阳光、空气和水”。通过数学家小故事，老师为学生创设开放的教学环境，给学生设置悬念，引发学生对内容的好奇心和探索欲。同时，使课堂教学与学生的情感、体验、思维、创新水乳交融，让学生健康的人格得到和谐全面的发展。让学生在猜测、想象、探索问题的美好空间里，体现数学应用的成功。

2. 泰勒公式是一元微分学的顶峰，有关的问题都可以用它来解决，引导学生掌握泰勒公式，体会“会当凌绝顶，一览众山小”。

分析评价	本案例通过数学家小故事，老师为学生创设开放的教学环境，给学生设置悬念，引发学生对内容的好奇心和探索欲. 让学生得到和谐全面的发展，让学生在猜测、想象、探索问题的美好空间里，体现数学应用之乐趣.
评价者	王念良 教授 商洛学院数学与计算机应用学院

案例编号	20031101-015
案例标题	泰勒公式
案例来源	原创
内容简介	通过数学史话之级数双子星泰勒和麦克劳林引出本节课的目标内容泰勒定理,并介绍拉格朗日型余项和泰勒公式的特殊情形——麦克劳林公式,通过例题练习,实践应用,让学生感受泰勒定理在函数近似中的应用.
关键词	泰勒定理;拉格朗日型余项;麦克劳林公式
编写时间	2024-3-3
编著者	王瑞 商洛学院
素材形式	文字、图片等
育人主题	感知人类命运共同体的密切关系,了解和认识世界文化瑰宝,积极吸纳,洋为中用,取其精华,不断成长.同时传递数学人职业素养,追求极致、一丝不苟,精益求精、不断创新的科学家精神也是我们前进路上的明灯和努力的方向.
素材长度	1750
案例正文	<p>案例一 数学史话之级数双子星泰勒和麦克劳林</p> <p>1. 布鲁克·泰勒于 1685 年出生在英国的埃德蒙顿, 1701 年进入剑桥大学学习, 1714 年获得法学博士学位. 不过他在大学期间也学习数学, 师从梅钦 (就是发明梅钦公式的那个人, 梅钦公式是用来计算 π 值的实际可用的公式). 1712 年泰勒被选为英国皇家学会会员, 并进入了仲裁牛顿和莱布尼茨发明微积分优先权的委员会, 后来因为健康原因离职了.</p> <p>泰勒最早提出了“马步遍历棋盘问题”, 即在 64 格的棋盘上, 每格只跳一次, 怎么走完整个棋盘. 这个问题最终由欧拉进行了科学的处理. 1714 年到 1719 年, 泰勒完成了两部极其重要的数学著作:《正和反的增量法》和《直线透视》. 而泰勒真正闻名于世的就是他在微积分学中的将函数展开成无穷级数的定理: 函数在一个点的邻域内的值可以用函数在该点的值和各阶导数值组成的无穷级数表现出来:</p> <p>然而, 在半个世纪里, 数学家们并没有认识到泰勒定理的重大价值, 直到拉格朗日才真正地发现了它的价值所在. 拉格朗日认为这个</p> 

定理是微积分的基本定理，并且给出了它的余项表达式，而泰勒定理的严格证明是由一个世纪之后的柯西来完成的。

泰勒的著作《正和反的增量法》为高等数学添加了一个新的分支，今天这个方法被称为有限差分方法。它使任何单变量函数都可展成幂级数；同时亦使泰勒成了有限差分理论的奠基者。泰勒在书中还讨论了微积分对一系列物理问题之应用，其中以有关弦的横向振动之结果尤为重要。他透过求解方程导出了基本频率公式，开创了研究弦振问题之先河。此外，此书还包括了他在数学上的其他创造性工作，如论述常微分方程的奇异解，曲率问题之研究等。

泰勒于 1731 年就不幸离世了。泰勒对数学的贡献要比一条以他命名的定理大得多，但是由于不喜欢明确和完整地把他的思路写下来，因此他的许多证明没有遗留下来。

2. 麦克劳林. 跟泰勒一样，科林·麦克劳林也是一名英国数学家，于 1698 年出生在苏格兰。麦克劳林在大学期间一开始是攻读神学的，不过由于对数学的爱好，后来转攻数学。19 岁时担任阿伯丁大学的数学教授（想想咱们 19 岁的时候在干什么），并在 21 岁时当选为英国皇家学会会员。



Colin Maclaurin (1698-1746)

那年他结识了牛顿，并成为了牛顿的学生。当年他就发表了第一本重要著作《构造几何》，在这本书中描述了作圆锥曲线的一些新的巧妙方法，精辟地讨论了圆锥曲线及高次平面曲线的种种性质。1742 年撰写的《流数论》以作为基本工具，是对牛顿的流数法作出符合逻辑的、系统解释的第一本书。他以熟练的几何方法和穷竭法论证了流数学说，还把级数作为求积分的方法，并独立于柯西以几何形式给出了无穷级数收敛的积分判别法。他得到数学分析中著名的麦克劳林级数展开式，并用待定系数法给予证明。他在代数学中的主要贡献是在《代数论》中，创立了用行列式的方法求解多个未知数联立线性方程组。后来由另一位数学家克莱默又重新发现了这个法则，所以现今称

之为克莱默法则.

麦克劳林终生不忘牛顿对他的栽培, 并为继承、捍卫、发展牛顿的学说而奋斗. 但是跟泰勒一样, 他也在创作的盛年就去世了, 只活了 48 岁. 死后在他的墓碑上刻有“曾蒙牛顿推荐”几个大字, 以表达他对牛顿的感激之情.

知识点 泰勒定理 多项式是函数中最简单的一种, 用多项式近似表达函数是近似计算中的一个重要内容, 泰勒公式就是一个应用广泛、精度更高的近似公式.

定理 6.10 (泰勒定理) 如果函数 $f(x)$ 在 $[a, b]$ 内具有直到 n 阶的连续导数, 在 (a, b) 上存在 $(n+1)$ 阶的导数, 则对任意的 $x, x_0 \in [a, b]$ 时, 至少存在一点 $\xi \in (a, b)$, 使得

$$f(x) = f(x_0) + f'(x_0)(x-x_0) + \frac{f''(x_0)}{2!}(x-x_0)^2 + \dots + \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x-x_0)^n + R_n(x) \quad (1)$$

其中

$$R_n(x) = \frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!}(x-x_0)^{n+1} \quad (\xi \text{ 介于 } x_0 \text{ 与 } x \text{ 之间}) \quad (2)$$

注: (1) (1) 式称为 $f(x)$ 按 $(x-x_0)$ 的幂展开到 n 阶的 Taylor 公式, $R_n(x)$ 的表达式 (2) 称为 Lagrange 型余项;

(2) 当 $n=0$ 时 (1) 变为: $f(x) = f(x_0) + f'(\xi)(x-x_0)$ (ξ 介于 x_0 与 x 之间), 这就是 Lagrange 公式; 即泰勒中值定理是拉格朗日中值定理的推广.

(3) 取 $x_0=0$, $f(x)$ 的麦克劳林公式

$$f(x) = f(0) + f'(0)x + \frac{f''(0)}{2!}x^2 + \dots + \frac{f^{(n)}(0)}{n!}x^n + R_n(x)$$

由此得到近似公式:

$$f(x) = f(0) + f'(0)x + \frac{f''(0)}{2!}x^2 + \dots + \frac{f^{(n)}(0)}{n!}x^n$$

例 1. 求 $f(x) = e^x$ 的 n 阶麦克劳林公式.

解 $f(x) = f'(x) = f''(x) = \dots = f^{(n)}(x) = e^x$

$$\Rightarrow f(0) = f'(0) = f''(0) = \dots = f^{(n)}(0) = 1,$$

又 $f^{(n+1)}(x) = e^x$ 所以

$$f^{(n+1)}(\theta x) = e^{\theta x} \Rightarrow R_n(x) = \frac{e^{\theta x}}{(n+1)!} x^{n+1} \quad (0 < \theta < 1),$$

令代入 (4) 式得:

$$e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \dots + \frac{x^n}{n!} + \frac{e^{\theta x}}{(n+1)!} x^{n+1} \quad (0 < \theta < 1)$$

由这个公式可知, 若把 e^x 用它的 n 次近似多项式表达为

$$e^x \approx 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \dots + \frac{x^n}{n!}$$

所产生的误差为

$$|R_n(x)| = \left| \frac{e^{\theta x}}{(n+1)!} x^{n+1} \right| < \frac{e^{|x|}}{(n+1)!} |x|^{n+1} \quad (0 < \theta < 1)$$

例如取 $x=1$, 得到

$$e \approx 1 + 1 + \frac{1}{2!} + \dots + \frac{1}{n!}$$

其误差

$$|R_n| < \frac{e}{(n+1)!} < \frac{3}{(n+1)!}.$$

当 $n=10$, $e \approx 2.718282$, 其误差不超过 10^{-6} .

【思政元素】1. 通过历史故事讲解, 提高学生的兴趣, 激起学生的好奇心, 然后逐步将学生带进本节内容理论知识上. 并且以”数学可以救命”这种幽默诙谐的方式引导学生数学学习的重要性. 通过几位数学家对泰勒定理研究的时间线介绍, 数学家们经过 200 多年时间才真正的搞明白. 揭示科学发展的曲折历程, 帮助学生树立科学品质, 培养探索精神和良好的科学精神.

2. 使学生领悟到生活中可借助已有的简单工具和方法来解决比较复杂问题的智慧.

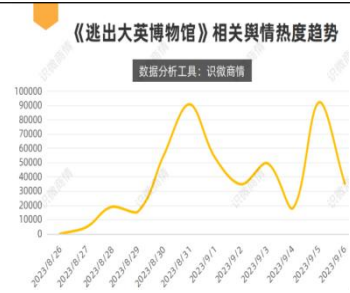
分析评价	<p>本案例通过数学名人生平及其重大发现引入,给出泰勒定理及泰勒公式——主要是用多项式函数来逼近相对较复杂的函数.当遇到较难研究的函数时,可以借助更具规律性的多项式函数来近似讨论,使学生领悟到生活中可借助已有的简单工具和方法来解决比较复杂问题的智慧.培养学生自强不息和追求完美的精神,树立正确的人生观,培养学生的数学思维和数学研究能力.</p>
评价者	王念良 教授 商洛学院数学与计算机应用学院

案例编号	20031101-016
案例标题	函数的单调性
案例来源	原创
内容简介	通过热搜词条的数据变化趋势图引发学生对函数及其曲线的分析,从而引导学生探究函数的导数和其单调性之间的关联,得出函数单调递增(递减)的充要条件,使得学生充分理解定理内容,能够熟练应用定理进行不等式的证明.
关键词	函数单调性;函数的导数
编写时间	2024-3-20
编著者	王瑞 商洛学院
素材形式	文字、图片等
育人主题	培养和提升学生政治认同感,厚植家国情怀,努力学习,奋发图强.同时传递给学生做人做事的标准,应该时刻具备法治意识、权利意识、责任意识,依法维权和遵纪守法.
素材长度	1166
案例正文	<p>案例一 住在热搜的词条数据分析.</p> <p>1.《逃出大英博物馆》是如何走红的?舆情热度趋势分析</p> <p>2023年8月底,《逃出大英博物馆》以拟人化的手法,讲述了“小玉壶”(原型为中华缠枝纹薄胎玉壶)在逃出大英博物馆后,偶遇在海外工作的中国记者并在他的帮助下回家的故事.据悉,该剧灵感来自今年1月间的一则网友评论,博主“煎饼果仔”在得此启发后,与“夏天妹妹”共赴英国,耗时3个月完成了制作.</p> <p>该剧虽仅有3集,时长不过17分钟,但在热度及口碑上都收获不俗.在更新一周后,剧集抖音播放量达2.7亿,B站播放量1505.9千万,小红书获赞1524.5k.另据新榜数据,两位主创近7天内在抖音分别涨粉269万、114万,在小红书分别涨粉27万、39万,在快手分别涨粉63万、43万,累计涨粉超555万.不仅如此,《逃出大</p>



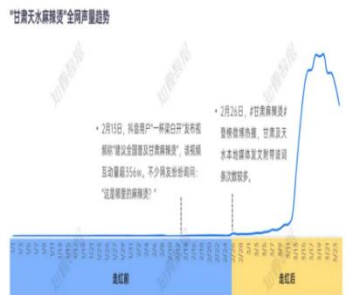
英博物馆》还获得 CCTV6、人民文娱、中国青年网等央媒好评。

此外，剧集还带起了“大英博物馆文物拟人”的话题潮流，吸引众多博主参与到主题变装创作中。



案例二 天水麻辣烫的“花路”

2024年3月前，有关“甘肃天水麻辣烫”的信息相对较少，声量趋势处于低位。进入3月后，尤其自3月12日开始，相关信息迅速增加，呈现“爆炸性”增长。甘肃天水麻辣烫”相关词条的产生趋势与声量相同，3月12日开始，各平台词条数量增速迅猛。快手、今日头条、抖音、微博四平台相关词条占比达87%。



提问：在互联网数据为王的时代，如果能解析住在热搜的秘诀，是否就能流量长虹呢？

知识点

定理 6.3 设函数 $f(x)$ 在闭区间 $[a, b]$ 上连续，在开区间 (a, b) 内可导，则有

- (1) 若在 (a, b) 内 $f'(x) > 0$, 则 $f(x)$ 在 $[a, b]$ 上单调增加;
- (2) 若在 (a, b) 内 $f'(x) < 0$, 则 $f(x)$ 在 $[a, b]$ 上单调减少.

注记:

(1) 定理中的闭区间换成其他各种区间（包括无穷区间），结论仍然成立.

(2) 若在 (a, b) 内 $f'(x) \geq 0$, [或 $f'(x) \leq 0$], 但等号只在个别点处成立, 则也有相应结论.

例 1 判定函数 $y = x - \sin x$ 在 $[-\pi, \pi]$ 上的单调性.

解 因为在 $[-\pi, \pi]$ 内 $y' = 1 - \cos x \geq 0$, 且等号仅在 $x = 0$ 处成立,

	<p>所以函数 $y = x - \sin x$ 在 $[-\pi, \pi]$ 上单调增加.</p> <p>函数单调性应用——证明不等式</p> <p>不等式证明通常比较困难, 其原因在于证明不等式的方法虽很多, 但各种方法通常都不具一般性. 利用拉格朗日中值定理可以证明不等式, 但该方法要求所证不等式能写成某个函数的增量的形式, 因而也不够一般性. 利用函数的单调性, 可建立一种不等式证明的较一般的方法.</p> <p>例 2 证明对任何实数 x, 有 $e^x \geq 1+x$.</p> <p>证明 令 $f(x) = e^x - 1 - x$, 则 $f'(x) = e^x - 1$. 当 $x > 0$ 时, $f'(x) > 0$, f 单调增加, 故 $f(x) > f(0)$; 当 $x < 0$ 时, $f'(x) < 0$, f 单调减少, 故 $f(x) > f(0)$; 又因为 $f(0) = 0$, 所以当 $x \neq 0$ 时, $f(x) > f(0)$ 恒成立, 即 $e^x > 1+x$. 而当 $x = 0$ 时, $e^x = 1+x$. 所以对任何实数 x, 有 $e^x \geq 1+x$.</p> <p>【思政元素】 生活中的“单调”有哪些呢?</p> <p>数学与生活具有密不可分的联系. 例如:</p> <p>(1) 利用导数判断函数的单调性, 是导数几何意义在研究曲线变化规律时的重要应用, 充分体现了数形结合的思想, 我国著名数学家华罗庚曾说过: “数形结合百般好, 隔裂分家万事休.”</p> <p>(2) 生活中经常会有许多关于“单调”的说法, 例如常有人说: “我的生活好单调.” 其实表达的就是生活中没有波折, 每天都是一个样, 没有做到多姿多彩.</p> <p>(3) 同一个函数, 随着自变量的变化, 呈现出不同的单调性, 成语“否极泰来”和“乐极生悲”都是生活中单调性改变的生动说明.</p>
分析评价	<p>本案例通过热搜词条的数据变化趋势图引发学生对曲线的分析, 对函数单调性的理解, 调动所学导数解释函数的单调性, 将生活和数学联系起来, 让数学知识点变得生动有趣, 容易理解.</p>
评价者	<p>王念良 教授 商洛学院数学与计算机应用学院</p>

案例编号	20031101-017
案例标题	函数极值
案例来源	原创
内容简介	本案例通过经典影视剧目片段引发学生的激烈讨论,通过对这一影视剧情节的各抒己见,向学生展示“人外有人,天外有天”的汉语俗语.意在强调和引导学生树立正确的人生观,涵养个人道德修养;调动学生的积极性,和学生在探究中发现函数极值的判定方法,培养学生严密的数学逻辑思维能力和数学问题解决能力.
关键词	函数极值;极大值、极小值;充分条件
编写时间	2024-3-16
编著者	王瑞 商洛学院
素材形式	文字、图片等
育人主题	弘扬中华优秀传统文化,培养学生树立正确的人生观价值观,积极涵养个人道德修养,调动学生数学逻辑思维能力和严密的问题解决能力.
素材长度	1166
案例正文	<p>案例一 周芷若连张无忌也能吊打,为何被黄衫女子秒杀?</p> <p>《倚天屠龙记》是金庸先生的武侠小说,同时也是一部影视剧,相信看过《倚天屠龙记》的读者和观众都知道,金庸先生在小说中,塑造了“周芷若”这样的一个美人形象,一开始她是清雅艳俗、楚楚动人的,是很多人心中的“女神”形象,但最终成为了一个“女魔头”,练就一手“九阴白骨爪”的阴毒功夫,让不少高手惊叹不已.在少林寺屠狮大会上,周芷若和张无忌交手,张无忌因为念旧情,被周芷若击败,险些命丧九阴白骨爪之下,好在胸口的伤疤,让周芷若手下留情,虽然她放了张无忌,但却打算直接击毙张无忌的义父“金毛狮王谢逊”,在这危难时刻,神秘的“黄衫女子”出现,救了谢逊一命.</p> <p>【思政元素】这个片段告诉我们,“人外有人,天外有天”,正如函数的极值.高明的人上面还有更高明的人,就像我们看见的天之外还另有天一样;能人之上往往更有能人,激励我们不能满足于现状,要时刻保持谦虚谨慎,踏踏实实做事儿,谦虚谨慎做人,勤奋好学,孜孜不倦,锐意进取.</p>



知识点

设 $f(x)$ 在 x_0 的某邻域 $U(x_0, \varsigma)$ 内有定义. 若对任意 $x \in U(x_0, \varsigma)$ 内有 $f(x) < f(x_0)$, 则称 $f(x)$ 在点 x_0 取得极大值 $f(x_0)$; 若对任意 $x \in U(x_0, \varsigma)$ 内有 $f(x) > f(x_0)$, 则称 $f(x)$ 在点 x_0 取得极小值 $f(x_0)$.

函数的极大值与极小值统称为函数的极值, 使函数取得极值的点称为极值点.

注记:

(1) 极值是一个局部概念, 是局部的最值, 一个函数不仅可有多个不等的极大值和极小值, 而且极小值还可以大于极大值.

(2) 函数的极值点只能是函数定义区间内部的点, 区间的端点不会是函数极值点.

(3) 可能取得极值的点有导数等于零的点(驻点)和导数不存在的点(不可导点).

驻点: 使 $f'(x) = 0$ 的点 x 称为函数 $f(x)$ 的驻点.

极值存在的必要条件:

设函数 $f(x)$ 在 x_0 处可导, 且在点 x_0 处取得极值, 那么 $f'(x_0) = 0$.

定理 6.11 (极值的第一充分条件)

设函数 $f(x)$ 在点 x_0 连续, 且在点 x_0 的某一去心邻域 $U(x_0, \varsigma)$ 内可导.

(1) 若 $x \in (x_0 - \varsigma, x_0)$ 时, $f'(x) > 0$, $x \in (x_0, x_0 + \varsigma)$ 时 $f'(x) < 0$, 则 $f(x)$ 在点 x_0 处取得极大值;

(2) 若 $x \in (x_0 - \varsigma, x_0)$ 时, $f'(x) < 0$, $x \in (x_0, x_0 + \varsigma)$ 时 $f'(x) > 0$, 则 $f(x)$ 在点 x_0 处取得极小值;

(3) 若 $f'(x)$ 在 $x \in U(x_0, \varsigma)$ 内不改变符号, 则 $f(x)$ 在点 x_0 处不取得极值.

注记: 函数判别极值的第一充分条件优点是既可判别驻点的极值性, 也可判别导数不存在的点的极值性.

定理 6.12 (极值的第二充分条件)

设函数 $f(x)$ 在点 x_0 处有二阶导数, 且 $f'(x_0) = 0, f''(x_0) \neq 0$, 则

- (1) 如果 $f''(x_0) < 0$, 则 $f(x)$ 在点 x_0 处取得极大值;
- (2) 如果 $f''(x_0) > 0$, 则 $f(x)$ 在点 x_0 处取得极小值;
- (3) 当 $f''(x_0) = 0$ 时, $f(x)$ 在点 x_0 处可能取得极值也可能不取得极值.

例 1 求 $f(x) = x^{\frac{2}{3}}(x-5)$ 的极值和单调区间.

解 定义域为 $(-\infty, +\infty)$, 计算导数

$$f'(x) = \frac{2}{3}x^{-\frac{1}{3}}(x-5) + x^{\frac{2}{3}} = \frac{1}{3}x^{-\frac{1}{3}}(2x-10+3x) = \frac{5x-10}{3\sqrt[3]{x}}.$$

令 $f'(x) = 0$ 得 $x = 2$, 另有 $f'(x)$ 不存在的点 $x = 0$.

列表讨论, 可得:

x	$(-\infty, 0)$	0	$(0, 2)$	2	$(2, +\infty)$
$f'(x)$	+	不存在	-	0	+
$f(x)$	↗	极大值	↘	极小值	↗

综上, $f(x)$ 在 $(-\infty, 0]$ 和 $[2, +\infty)$ 单调增加, 在 $[0, 2]$ 单调减少, 在 $x = 0$ 处取得极大值 $f(0) = 0$, 在 $x = 2$ 处取得极小值 $f(2) = -3\sqrt[3]{4}$.

例 2 求函数 $f(x) = x^3 + 3x^2 - 9x - 6$ 的极值.

解 定义域为 $(-\infty, +\infty)$, 计算导数

$$f'(x) = 3x^2 + 6x - 9 = 3(x-1)(x+3), f''(x) = 6(x+1).$$

令 $f'(x) = 0$ 得两个驻点 $x_1 = -3, x_2 = 1$. 因为 $f''(-3) = -12 < 0$, 所以 $f(-3) = 21$ 为极大值; 因为 $f''(1) = 12 > 0$, 所以 $f(1) = -11$ 是极小值.

注记: 判别极值的第二充分条件优点是应用简便, 只需通过驻点处的二阶导数的符号便可确定可能极值点的极值性; 缺点是使用范围

	<p>有限，对 $f''(x)=0$、$f'(x)$及$f''(x)$同时不存在的点不能使用.</p> <p>【思政元素】 通过学习极值的 2 个充分条件，引导学生学会从不同的角度处理同一个问题，培养数学思维的灵活性，提高分析和解决问题的能力，感受数学之美.</p>
分析评价	<p>本案例通过经典影视剧目片段引发学生的激烈讨论，通过对这一影视剧情节的各抒己见，向学生展示“人外有人，天外有天”的汉语俗语.意在强调和引导学生树立正确的人生观，涵养个人道德修养；通过研究函数极值的判定方法，培养学生的数学问题解决能力.</p>
评价者	王念良 教授 商洛学院数学与计算机应用学院

案例编号	20031101-018
案例标题	函数最值
案例来源	原创
内容简介	本案例通过“中国之最”引发学生对“最”话题的讨论度，点题“函数的最值”，通过两类例题的解析，明确了数学中和生活中对“最”问题的关注度，激发学生对本堂课的学习兴趣，培养学生应用所学解决较综合数学问题的能力.
关键词	函数最值；最大值、最小值
编写时间	2022-5-2
编著者	商洛学院
素材形式	文字、图片等
育人主题	增强民族自豪感，扩展学生全球视野，同时可以增强其环保意识，强化国家主体意识，爱祖国、爱人民、爱家乡、爱学校.
素材长度	1228
案例正文	<p>案例一 中国之“最”</p> <p>1. 中国最大的内陆盆地——塔里木盆地. 在新疆维吾尔自治区南部. 北、西、南为天山、帕米尔和昆仑山、阿尔金山环绕.</p>  <p>2. 中国最大的草原——呼伦贝尔大草原. 呼伦贝尔草原位于内蒙古自治区东北部，大兴安岭以西，因呼伦湖、贝尔湖而得名. 地势东高西低，海拔在650~700米之间，总面积约为10万平方千米(一亿四千九百万亩)，是世界著名的天然牧场，是世界四大草原之一.</p>  <p>3. 中国最大的平原——东北平原. 东北平原或称松辽平原、关东平原，是中国三大平原之一，也是中国最大的平原，位于中国东北部，由三江平原、松嫩平原、辽河平原组成，地跨黑龙江、吉林、辽宁和内蒙古四个省区，地处大、小兴安岭和长白山脉之间，北起嫩江中游，南至辽东湾，南北长约1000千米，东西宽约400千米，面积达35万平方千米.</p> 

4. 中国最大的高原——青藏高原. 青藏高原是中国最大、世界海拔最高的高原, 被称为“世界屋脊”、“第三极”, 南起喜马拉雅山脉南缘, 北至昆仑山、阿尔金山和祁连山北缘, 西部为帕米尔高原和喀喇昆仑山脉, 东及东北部与秦岭山脉西段和黄土高原相接, 青藏高原东西长约 2800 千米, 南北宽约 300~1500 千米, 总面积约 250 万平方千米.



5. 中国最高的山脉——喜马拉雅山脉. 喜马拉雅山脉, 位于青藏高原南巅边缘, 是世界海拔最高的山脉, 其中有 110 多座山峰高达或超过海拔 7350 米. 是东亚大陆与南亚次大陆的天然界山, 也是中国与印度、尼泊尔、不丹、巴基斯坦等国的天然国界, 西起克什米尔的南迦-帕尔巴特峰, 东至雅鲁藏布江大拐弯处的南迦巴瓦峰, 全长 2450km, 宽 200~350km.



7. 中国最长的峡谷——长江三峡. 长江三峡又名峡江或大三峡, 位于中国重庆市、恩施州、宜昌市地区境内的长江干流上, 西起重庆市奉节县的白帝城, 经过恩施, 东至湖北省宜昌市的南津关, 全长 193 千米, 由瞿塘峡、巫峡、西陵峡组成.



8. 中国最高的盆地——柴达木盆地. 柴达木盆地是中国三大内陆盆地之一, 属封闭性的巨大山间断陷盆地. 位于青海省西北部, 青藏高原东北部, 主要在海西蒙古族藏族自治州. 西北北抵阿尔金山脉; 西南至昆仑山脉; 东北有祁连山脉,



面积 25.7768 万平方千米.

9. 中国最低的盆地——吐鲁番盆地. 吐鲁番盆地是新疆天山东部南坡的一个山间盆地, 范围以吐鲁番市为主, 50140 平方千米. “吐鲁番”是维吾尔语“低地”的意思.



10. 中国最深的峡谷——虎跳峡. 虎跳峡位于香格里拉市虎跳峡镇境内, 距香格里拉市 96 公里, 距丽江市 80 公里. 发源自青海格拉丹东雪山的金沙江迢迢千里奔波到



此, 突遇玉龙、哈巴两座雪山的阻挡, 原本平静祥和的江水顿时变得怒不可遏, 虎跳峡是万里长江第一大峡谷, 横穿与哈巴和玉龙雪山之间因猛虎跃江心石过江的传说而得名. 3900 米下的水石咆哮, 216 米短距离落差, 以其山高谷深, 雄奇险峻闻名于世.

知识点 就两种情形给出求函数最大值最小值的方法.

(1) 函数 $f(x)$ 在闭区间 $[a, b]$ 上连续, 求 $f(x)$ 在 $[a, b]$ 上的最大值和最小值;

(2) 实际问题中求目标函数的最大值或最小值.

归纳求连续函数 $f(x)$ 在 $[a, b]$ 上最值的步骤:

1. 求出 $f(x)$ 在 (a, b) 内可能取得极值的点(驻点和不可导点)

$$x_1, x_2, x_3, \dots, x_n$$

2. 比较

$$\max_{a \leq x \leq b} f(x) = \max \{f(a), f(b), f(x_1), f(x_2), \dots, f(x_n)\},$$

$$\min_{a \leq x \leq b} f(x) = \min \{f(a), f(b), f(x_1), f(x_2), \dots, f(x_n)\}.$$

【思政元素】 本案例通过“中国之最”让学生领略祖国的大好河山, 激发学生的爱国之情, 引发学生对“最”话题的讨论度, 点

	<p>题“函数的最值”，通过两类例题的解析，明确了数学中和生活中对“最”问题的关注度，吸引学生不断勇攀生活和学习的高峰，创造属于自己的“每日之最”。意在培养学生的坚强勇敢、自立自强、奋斗不息的美好品质。</p>
分析评价	<p>本案例通过“中国之最”让学生领略祖国的大好河山，激发学生的爱国之情，引发学生对“最”话题的讨论度，点题“函数的最值”，通过两类例题的解析，明确了数学中和生活中对“最”问题的关注度，吸引学生不断勇攀生活和学习的高峰，创造属于自己的“每日之最”。意在培养学生的坚强勇敢、自立自强、奋斗不息的美好品质。</p>
评价者	王念良 教授 商洛学院数学与计算机应用学院

案例编号	20031101-019
案例标题	函数曲线的凹凸性
案例来源	原创
内容简介	从认识中国地形剖面图出发, 激发学生对祖国大好河山的热爱和保护意识. 通过生动的案例抛出疑问, 引导学生学习函数曲线凹凸性的内容, 掌握判定方法, 会判断函数的凹凸性、找到函数图像的拐点. 同时, 严谨证明, 培养学生严密的数学逻辑思维能力.
关键词	函数凹凸性; 拐点; 导数; 充要条件
编写时间	2024-3-6
编著者	王瑞 商洛学院
素材形式	文字、图片等
育人主题	培养学生严密的数学证明逻辑和科学思维方法, 激发学生对祖国大好河山的热爱之情, 培养学生民族意识
素材长度	1071
案例正文	<p>案例一 中国地形剖面示意图</p> <p style="text-align: center;">中国地形剖面示意图 (沿北纬32度)</p> <p>凹坡和凸坡、通视问题是地形坡面图的主要应用, 在地理科目学习中经常会遇到. 而地形剖面图可以很直观地帮助我们判断和了解某一方向某一区间的地势高低起伏状况, 同时可以帮助人们了解野外考察时观测点与被观测点之间的通视情况.</p> <p>具体优点有如下两个方面:</p> <p>(1) 地形剖面图判断地势的情况比分层设色地形图和等高线地形图形象而且直观.</p> <p>(2) 利用地形剖面图可以很好地了解实际地点的通视情况.</p> <p>【思政元素】1. 从认识中国地形剖面图出发, 可以激发学生对祖国大好河山的热爱和保护意识. 通过生动的案例让学生深刻了解到自然环境对人类的重要性, 以及我们对自然环境的依赖. 从而在潜移默化中培养学生的热爱祖国、保护环境的情感, 增强学生对祖国的认同感和自豪感.</p>

2. 地形教学还可以扩大学生的视野, 增加对民族地理环境的认识. 学生可以深入了解祖国各地的地貌特征, 从而加深学生对祖国的多元文化和多样性的认知, 增强对本国民族地理环境的认同感和自豪感.

知识点 函数的凹凸性

定义 1 设 $f(x)$ 为定义在区间 I 上的函数, 如果对 I 上任意两点 x_1, x_2 和任意实数 $\lambda \in (0,1)$, 总有

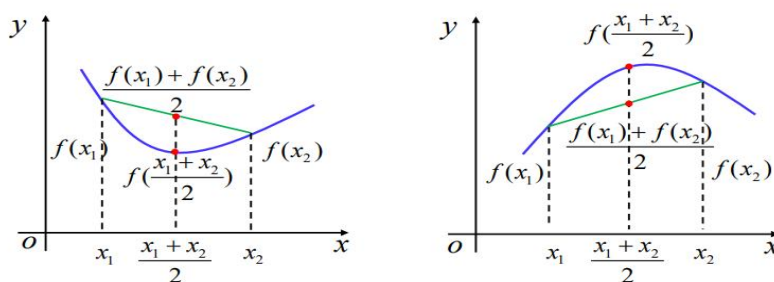
$$f(\lambda x_1 + (1-\lambda)x_2) \leq \lambda f(x_1) + (1-\lambda)f(x_2), \quad (1)$$

则称 f 为 I 上的凸函数. 反之, 如果总有

$$f(\lambda x_1 + (1-\lambda)x_2) \geq \lambda f(x_1) + (1-\lambda)f(x_2), \quad (2)$$

则称 f 为 I 上的凹函数.

如果 (1)、(2) 中的不等式改为严格不等式, 则相应的函数称为严格凸函数和严格凹函数.



容易证明, 若 $-f$ 为区间 I 上的凸函数, 则 f 为区间上 I 的凹函数. 因此今后只需讨论凸函数的性质即可.

引理 f 为区间 I 上的凸函数的充要条件是对于 I 上的任意三点 $x_1 < x_2 < x_3$, 总有



$$\frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1} \leq \frac{f(x_3) - f(x_2)}{x_3 - x_2}.$$

定理 6.14 设 f 为区间 I 上的可导函数, 则下列论断相互等价:

- (1) f 为区间 I 上的凸函数;
- (2) f' 为区间 I 上的增函数;
- (3) 对 I 上任意两点 x_1, x_2 , 有

$$f(x_2) \geq f(x_1) + f'(x_1)(x_2 - x_1).$$

	<p>注记：论断（3）的几何意义是：曲线 $y = f(x)$ 总是在它的任一切线的上方.</p> <p>定理 6.15 设 $f(x)$ 在 $[a, b]$ 上连续, 在 (a, b) 内具有一阶和二阶导数, 则</p> <p>(1) 若在 (a, b) 内 $f''(x) > 0$, 则 $f(x)$ 在 $[a, b]$ 上的图形是凹的;</p> <p>(2) 若在 (a, b) 内 $f''(x) < 0$, 则 $f(x)$ 在 $[a, b]$ 上的图形是凸的.</p> <p>例 1 判定曲线 $y = \ln x$ 的凹凸性.</p> <p>解 函数的定义域为 $(0, +\infty)$, $y' = \frac{1}{x}, y'' = -\frac{1}{x^2}$</p> <p>当 $x > 0$ 时 $y'' < 0$, 故 $y = \ln x$ 在 $(0, +\infty)$ 内是向下凹的.</p> <p>定义 2 连续函数曲线上严格凹区间和严格凸区间的分界点称为曲线的拐点.</p> <p>定理 6.16 若 f 在 x_0 二阶可导, 则 $(x_0, f(x_0))$ 为曲线拐点的必要条件是 $f''(x_0) = 0$.</p> <p>定理 6.17 若 f 在 x_0 可导, 则 f 在某邻域 $U^\circ(x_0)$ 上二阶可导. 若在 $U^-(x_0)$ 和 $U^+(x_0)$ 上 $f''(x_0)$ 的符号相反, 则 $(x_0, f(x_0))$ 为曲线拐点.</p> <p>【思政元素】 培养学生严密的数学证明逻辑和科学思维方法. 数学推理和证明需要学生建立正确的思维方式. 首先, 学生需要注意思维的逻辑性, 善于分析问题, 并从中找出规律和关联. 其次, 学生需要培养严谨性的思维方式, 通过学习证明过程和结构, 使学生形成追求证明正确性的思维方式. 最后, 学生需要发展创造性思维, 鼓励学生从不同的角度思考问题, 并提供多元化的解决方法.</p>
分析评价	<p>本案例从认识中国地形剖面图出发, 可以激发学生对祖国大好河山的热爱和保护意识. 通过生动的案例让学生深刻了解到自然环境对人类的重要性, 以及自然环境中蕴含的数学. 从而在潜移默化中将知识点传送给学生, 而且还培养了学生热爱祖国、保护环境的情感, 增强学生对祖国的认同感和自豪感.</p>
评价者	王念良 教授 商洛学院数学与计算机应用学院

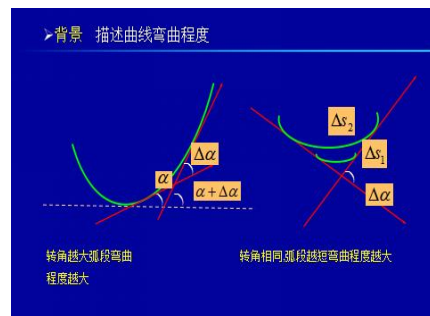
案例编号	20031101-020
案例标题	曲率
案例来源	原创
内容简介	介绍西班牙高铁脱轨事故，分析脱轨原因是否与弯道设计有关，从而引出曲率的概念，使学生深刻理解曲率的物理意义，从而探索对曲率的定义和计算表达式；介绍砂轮打磨案例，学生能够学以致用。
关键词	高铁脱轨；砂轮打磨；曲率
编写时间	2021-6-3
编著者	卢晶 商洛学院
素材形式	文字、图片等
育人主题	让学生感受数学思想无处不在，让学生深刻体会科学的科学性和严谨性，帮助学生养成良好的学习习惯、思维严谨、工作求实的作风。
素材长度	1207
案例正文	<p>案例一 2013年7月24日晚8点42分左右，一列从西班牙首都马德里开往北部城市费罗尔的火车在途经圣地亚哥附近时发生脱轨。目前事故的原因尚在调查之中。据最新数据统计，已有60人在此次事故中丧生，另有131人受伤。死亡人数已经上升到80人，170余人受伤。加利西亚自治区政府代表华雷斯说，事故原因正在调查中，目前没有迹象表明本次严重事故是由外部原因造成的。西班牙首相马里亚诺·拉霍伊24日晚向火车脱轨事故的死难者表示哀悼，希望受伤人员尽快康复。</p>  <p>案例二 从2008年第一条高速铁路——京津城际铁路投入运营，到如今形成全球最大的高速铁路网络，中国高铁实现了从无到有、从追赶到领跑的华丽转身。记得当年，“和谐号”动车组首次亮相，以其优雅的外形、平稳的运行、惊人的速度，迅速成为了国人的骄傲。而后的“复兴号”，更是将中国高铁的速度推向了350公里/小时的新高度，让世界对中国速度刮目相看。随着科技的不断进步，高铁的未来充满了无限可能。智能化、</p> 

绿色化成为了新的发展趋势.比如,无人驾驶高铁、超级磁悬浮列车的概念正逐步变为现实.想象一下,未来的高铁不仅速度快,而且更加环保节能,甚至可能实现跨国界的无缝连接,让地球村的概念更加真切.同时,随着 5G、物联网等技术的应用,高铁旅行将变得更加便捷、个性化,让每一次出行都成为一次享受.

案例三 车身色彩以青花蓝为主基调,配以动感十足的白色飘带,一朵朵晶莹剔透的雪花若隐若现……时间回到 2019 年 12 月 30 日,首列京张高铁“复兴号”智能动车组从北京北站出发,驶向河北张家口市崇礼区太子城站,世界上首条时速 350 公里的智能高铁——京张高铁正式开通试运营.

“如今,“复兴号”家族已形成系列产品,能够适应高原、高寒、湿热、风沙等多种运行环境需求.”京张高铁“复兴号”智能动车组副总设计师朱彦,正是王健所说的前辈之一.“一列‘复兴号’高速列车,有 50 多万个零部件,高铁制造涉及冶金、高分子材料、合成材料、精密仪器、机械、电力等众多产业.中国铁路的发展,背后是我们自主创新能力的增强和制造业的升级.

知识点 曲率描述曲线弯曲程度.轨道的曲率设计是工程设计和道路桥梁设计的理论基础,同时也是一项复杂的任务.为了保证高铁的安全性和舒适性,轨道的曲率必须经过精确的计算和设计.

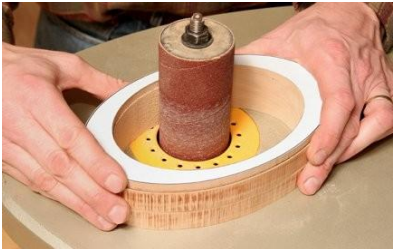


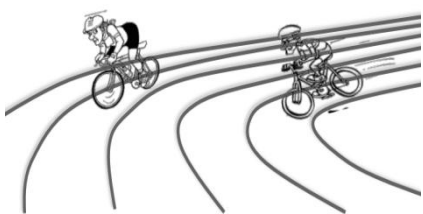


【思政元素】 1. 设计上的小失误,往往会导致大事故的发生,从而使无数生命付出代价,启发学生应秉持严谨细致的工作态度、求真务实的工作作风.

2. 用我国高铁取得的巨大成就激发学生的爱国热情和民族自豪感,引导学生了解曲率知识背后的感人事迹和科学家精神.

案例二 设一工件内表面的截痕为一椭圆,现要用砂轮磨削其内表面,问选择多大的砂轮比较合适?

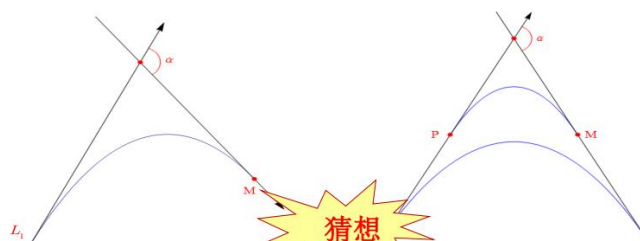
	<p>解 设椭圆方程 $\begin{cases} x = a \cos t \\ y = b \sin t \end{cases} (0 \leq t \leq 2\pi, b \leq a)$, 可知椭圆在 $(\pm a, 0)$ 处的曲率最大, 即曲率半径最小, 且</p> $R = \frac{(a^2 \sin^2 t + b^2 \cos^2 t)^{\frac{3}{2}}}{ab} \Big _{t=0} = \frac{b^2}{a}$ <p>显然, 砂轮半径不超过 $\frac{b^2}{a}$ 时, 才不会过度磨损或有的地方磨不到的问题.</p> <p>知识点 光滑曲线弧上自点 M 开始取弧段, 其长为 Δs, 对应切线转角为 $\Delta \alpha$, 定义弧段 Δs 上的平均曲率 $\bar{K} = \left \frac{\Delta \alpha}{\Delta s} \right$, 点 M 处曲率为 $K = \lim_{\Delta s \rightarrow 0} \left \frac{\Delta \alpha}{\Delta s} \right = \left \frac{d\alpha}{ds} \right$</p> <p>曲率的计算公式: $K = \frac{ y'' }{(1+y'^2)^{\frac{3}{2}}}$.</p> <p>【思政元素】 理论联系实际, 培养学生的数学建模能力, 提高分析问题和解决问题的能力.</p>
分析评价	<p>案例一通过事故引发学生对弯道设计的思考, 从而加深学生对曲率内容的学习印象, 培养学生具备科学严谨、求真务实的精神; 用我国高铁取得的巨大成就激发学生的爱国热情和民族自豪感. 案例二向学生直观展现砂轮, 使学生认识的到砂轮打磨过程中蕴含的数学元素, 深刻体会到了数学无处不在, 使学生学以致用.</p>
评价者	王念良 教授 商洛学院数学与计算机应用学院



案例编号	20031101-021
案例标题	曲率及函数图像的讨论
案例来源	原创
内容简介	本案例通过日常生活中骑行时过弯细节、高铁轨道中缓冲轨道设计的意图等生活常见实例引入曲率教学内容，通过鼓励学生大胆猜想，考虑与曲线弯曲程度有影响的量而展开课程教学，注重培养学生提出问题、解决问题的能力，通过恰当讲练，让学生掌握新知识.
关键词	曲率；函数图像的描绘；渐近线
编写时间	2024-3-3
编著者	王瑞 商洛学院
素材形式	文字、图片等
育人主题	拓展学生认知视野，带领学生感悟中国速度，厚植家国情怀
素材长度	932
案例正文	<p>案例一 大家在骑自行车时是否有这样的感觉，转大弯比转小弯轻松一些？</p>  <p>案例二 中国高铁在不到二十年的时间里从无到有，总里程达到4.3万公里，预计2023年底可达4.5万公里，是世界第一。高铁最高时速可达350公里每小时，安全性高，是世界上运营里程最长、运行速度最快、安全系数最高的交通工具。中国高铁已经成为中国制造的金色名片，让更多人了解并热爱中国制造高铁过弯时的轨道设计：火车轨道由直轨转入弯道时，通常不是立即接上圆弧轨道，往往在直道和弯道之间接入一段缓冲段，分析一下为什么？</p>  <p>案例三 “如果我们把18世纪的数学家们想象为一系列的高峰峻岭，那么最后一座使人肃然起敬的峰巅便是高斯”。高斯是18、19世纪之交最伟大的德国数学家、天文学家和物理学家，他的贡献遍及纯数学和应用数</p> 

学的各个领域，在数论、代数、非欧几何、微分几何、超几何、级数、复变函数及椭圆函数论等方面均有一系列开创性的贡献，他在学术上十分谨慎，恪守这样的原则：“问题在思想上没有弄通之前决不动笔”。他的形象已经成为数学告别过去，走向现代数学时代的象征。高斯：“我要定量分析曲率，我要自己发明描述曲率的数学工具，定义自然界曲率的数学规则，而不是定性地用“大”或者“小”描述它。”

问题 曲线的弯曲程度与哪些量有关？



弧段弯曲程度越大，转角越大；

转角相同，弧段越短，弯曲程度越大。

即曲线与切线的转角成正比，与弧长成反比。

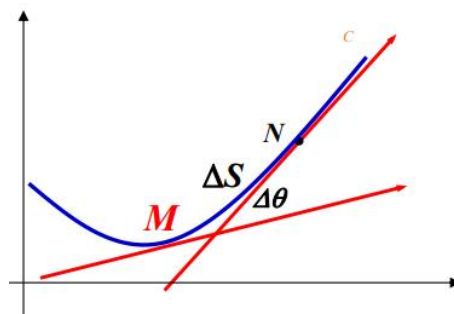
知识点

定义. 设 M 与 N 为光滑平面曲线 C 上的两点，曲线 C 在点 M 处的曲率

$$k = \lim_{\Delta s \rightarrow 0} \left| \frac{\Delta \theta}{\Delta s} \right| = \left| \frac{d\theta}{ds} \right|.$$

(1) 直线的曲率处处为零；

(2) 圆上各点的曲率等于半径的倒数，且半径越小曲率越大。

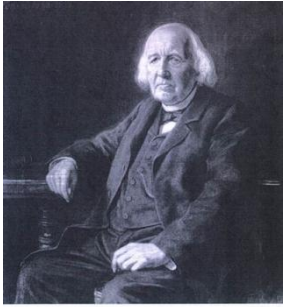


2. 曲率的计算公式

(1) 由直角坐标方程表示的平面曲线曲率的计算公式

设曲线 C 的直角坐标方程为 $y = f(x)$ ，其中 $f(x)$ 上具有二阶导

	<p>数. 曲线 C 在点 $M(x, y)$ 处的曲率的计算公式</p> $k = \frac{ y'' }{(1+y'^2)^{\frac{3}{2}}}$ <p>(2) 由参数方程表示的平面曲线曲率的计算公式</p> <p>设光滑曲线 C 的参数方程为 $\begin{cases} x = x(t), \\ y = y(t), \end{cases} t \in [\alpha, \beta]$, 其中 $x(t)$ 与 $y(t)$ 二阶可导, 且 $x'^2 + y'^2 \neq 0$, 曲线 C 在点 M 处曲率的计算公式</p> $k = \frac{ x'y'' - y'x'' }{(x'^2 + y'^2)^{\frac{3}{2}}}$ <p>(3) 由极坐标表示的平面曲线曲率的计算</p> <p>设光滑曲线 C 的极坐标方程为 $\rho = \rho(\theta), \theta \in [\alpha, \beta]$,</p> $\begin{cases} x = \rho(\theta) \cos \theta, \\ y = \rho(\theta) \sin \theta, \end{cases} \theta \in [\alpha, \beta],$ <p>则</p> $k = \frac{ x'y'' - y'x'' }{(x'^2 + y'^2)^{\frac{3}{2}}}$ <p>当曲线 $y = f(x)$ 上的一动点 P 沿着曲线移向无穷点时, 如果点 P 到某定直线 L 的距离趋向于 0, 那么直线 L 就称为曲线 $y = f(x)$ 的一条渐近线.</p> <p>【思政元素】 1. 以中国高铁的发展引入学习内容“曲率”, 引领学生思考新时代背景下, 我们应该如何为“中国速度”发力, 引发共鸣.</p> <p>2. 培养学生精益求精的学习态度和不断创新的精神.</p>
分析评价	<p>本案例通过高铁轨道设计引入曲率教学内容, 教学环节设计巧妙, 注重培养学生独立思考、解决问题的能力, 在讲练结合中让学生掌握新知识. 培养学生精益求精的学习态度和不断创新的精神.</p>
评价者	<p>王念良 教授 商洛学院数学与计算机应用学院</p>

案例编号	20031101-022
案例标题	实数的完备性 1
案例来源	原创
内容简介	完备性是实数集有别于有理数集的重要特征，是实数集的优点，因此将极限理论建立在实数集上，极限理论就有了稳固的基础. 主要介绍（1）实数的区间套定理；（2）掌握聚点定理. 通过介绍魏尔斯特拉斯的传奇一生，培养学生的严谨治学的精神，提升学生推陈出新的勇气.
关键词	区间套定理，聚点定理
编写时间	2024-5-30
编著者	岳毅蒙 商洛学院
素材形式	文字、图片等
育人主题	培养学生严谨治学的精神和推陈出新的勇气
素材长度	1138
案例正文	<p>案例一 卡尔·特奥多尔·威廉·魏尔斯特拉斯（1815年10月31日-1897年2月19日），德国数学家，在数学史上，魏尔斯特拉斯关于分析严格化的贡献使他获得了“现代分析之父”的称号. 他是把严格的论证引进分析学的一位大师，为分析严密化作出了不可磨灭的贡献，是分析算术化运动的开创者之一. 这种严格化的突出表现是创造了一套语言，用以重建分析体系. 他批评柯西等前人采用的“无限地趋近”等说法具有明显的运动学含义，代之以更严密的表述，用这种方式重新定义了极限、连续、导数等分析基本概念，特别是通过引进以往被忽视的一致收敛性而消除了微积分中不断出现的各种异议和混乱.</p>  <p style="text-align: right; font-size: small;">Karl Weierstraß 1815-1897</p> <p>知识点</p> <p>一、区间套定理</p> <p>定义 1 设闭区间列 $\{[a_n, b_n]\}$ 具有如下性质：</p> <p>(1) $[a_n, b_n] \supset [a_{n+1}, b_{n+1}], n = 1, 2, \dots;$</p> <p>(2) $\lim_{n \rightarrow \infty} (b_n - a_n) = 0$</p> <p>则称 $\{[a_n, b_n]\}$ 为闭区间套，或简称区间套.</p> <p>定理 7.1(区间套定理) 若 $\{[a_n, b_n]\}$ 是一个区间套，则在实数系中存在唯一的一点 ξ 使得 $\xi \in [a_n, b_n], n = 1, 2, \dots$, 即</p>

$$a_n \leq \xi \leq b_n, n=1,2,\dots$$

证(使用单调有界定理) 先证存在性.因为 $\{[a_n, b_n]\}$ 是一个区间套, 所以

$$a_1 \leq a_2 \leq \dots \leq a_n \leq \dots \leq b_n \leq \dots \leq b_2 \leq b_1,$$

又设 $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = \xi$, 且由条件 2 有 $\lim_{n \rightarrow \infty} b_n = \lim_{n \rightarrow \infty} (b_n - a_n + a_n) = \lim_{n \rightarrow \infty} a_n = \xi$

由单调有界定理的证明过程有 $a_n \leq \xi \leq b_n, n=1,2,\dots$. 再证唯一性.

设 ξ' 也满足 $a_n \leq \xi' \leq b_n, n=1,2,\dots$. 那么,

$$|\xi - \xi'| \leq b_n - a_n, n=1,2,\dots$$

由区间套的条件 2 得

$$|\xi - \xi'| \leq \lim_{n \rightarrow \infty} (b_n - a_n) = 0$$

故有 $\xi = \xi'$.

推论 若 $\xi \in [a_n, b_n] (n=1,2,\dots)$ 是区间套 $\{[a_n, b_n]\}$ 所确定的点, 则对任给的 $\varepsilon > 0$, 存在 $N > 0$, 使得当 $n > N$ 时有 $[a_n, b_n] \subset U(\xi, \varepsilon)$.

二、聚点定理

定义 2 设 S 为数轴上点的点集, ξ 为定点, 若 ξ 的任何邻域内都有含有 S 中无穷多个点, 则称 ξ 为点集 S 的一个聚点.

例如: $\{(-1)^n + \frac{1}{n}\}$ 有两聚点 $\xi = 1, \xi = -1$.

$\{\frac{1}{n}\}$ 有一个聚点 $\xi = 0$.

(a, b) 内的点都是它的聚点, 所以开区间集 (a, b) 有无穷多个聚点.

定义 2' 对于点集 S , 若点 ξ 的任何 ε 邻域内都含有 S 中异于 ξ 的点, 即 $U^0(\xi; \varepsilon) \cap S \neq \emptyset$, 则称 ξ 为 S 的一个聚点.

定义 2'' 若存在各项互异的数列 $\{x_n\} \subset S$, 则其极限 $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = \xi$ 称为 S 的一个聚点.

三个定义等价性的证明: 证明思路为: $2 \Rightarrow 2' \Rightarrow 2'' \Rightarrow 2$.

定义 $2' \Rightarrow 2''$ 的证明:

由定义 2' 设 ξ 为 S 的一个聚点, 则对任给的 $\varepsilon > 0$, 存在

$x \in U^0(\xi, \varepsilon) \cap S$.

令 $\varepsilon_1 = 1$, 则存在 $x_1 \in U^0(\xi, \varepsilon) \cap S$;

令 $\varepsilon_2 = \min(\frac{1}{2}, |\xi - x_1|)$, 则存在 $x_2 \in U^0(\xi; \varepsilon_2) \cap S$, 且显然 $x_2 \neq x_1$;

.....

令 $\varepsilon_n = \min(\frac{1}{2}, |\xi - x_{n-1}|)$, 则存在 $x_n \in U^0(\xi; \varepsilon_n) \cap S$, 且显然 x_n 与 x_1, \dots, x_{n-1} 互异;

.....

得 S 中各项互异的数列 $\{x_n\}$, 且由 $|\xi_n - x_n| < \varepsilon_n \leq \frac{1}{n}$, 知 $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = \xi$.

由闭区间套定理可证聚点定理.

定理 7.2 (Weierstrass 聚点定理) 实数轴上的任一有界无限点集 S 至少有一个聚点.

证 (用区间套定理证明, 体会区间套的构造) 由于 S 有界, 所以存在 $M > 0$, 使得 $S \subset [-M, M]$, 记 $[a_1, b_1] = [-M, M]$, 将 $[a_1, b_1]$ 等分为两个子区间. 因 S 为无限点集, 故两个子区间中至少有一个含有 S 中无穷多个点, 记此子区间为 $[a_2, b_2]$, 则 $[a_1, b_1] \supset [a_2, b_2]$ 且 $b_2 - a_2 = \frac{1}{2}(b_1 - a_1) = \frac{M}{2}$. 再将 $[a_2, b_2]$ 等分为两个子区间, 则其中至少有一个含有 S 中无穷多个点, 取出这样一个子区间记为 $[a_3, b_3]$, 则 $[a_2, b_2] \supset [a_3, b_3]$, 且

$$b_3 - a_3 = \frac{1}{2}(b_2 - a_2) = \frac{M}{2^2}$$



依次继续得一区间列 $\{[a_n, b_n]\}$, 它满足:

$$[a_n, b_n] \supset [a_{n+1}, b_{n+1}], n = 1, 2, \dots;$$

$$b_n - a_n = \frac{M}{2^{n-1}} \rightarrow 0 (n \rightarrow \infty),$$

即 $\{[a_n, b_n]\}$ 为闭区间套, 且其中每一个闭区间都含有 S 中无穷多个点. 由区间套定理, 存在唯一的一点 ξ 使得 $\xi \in [a_n, b_n], n = 1, 2, \dots$. 由定理 1 的推论, 对任给的 $\varepsilon > 0$, 存在 $N > 0$, 使得当 $n > N$ 时有

	<p>$[a_n, b_n] \subset U(\xi, \varepsilon)$. 从而 $U(\xi; \varepsilon)$ 含有 S 中无穷多个点, 按定义 ξ 为 S 的一个聚点.</p> <p>【思政元素】 1. 实数完备性定理的阐述, 使学生更好地体会数学的发现、发展过程以及由此产生的各种数学思想方法, 理解数学的严谨性, 培养逻辑思维能力. 闭区间套定理套出的那一点 (痛苦的或失败的经历) 在人生道路上是微不足道的. 聚点定理引导学生在大千世界总能找到志同道合的人.</p> <p>2. 通过介绍数学家魏尔斯特拉斯对分析学的贡献, 培养学生的严谨治学的精神, 提升学生推陈出新的勇气.</p>
分析评价	<p>本案例阐述了实数完备性定理, 通过介绍数学家魏尔斯特拉斯对分析学的贡献, 培养学生的严谨治学的精神, 提升学生推陈出新的勇气.</p>
评价者	<p>王晓 教授, 商洛学院数学与计算机应用学院</p>

案例编号	20031101-023
案例标题	实数的完备性 2
案例来源	原创
内容简介	介绍数学家海涅和博雷尔的的生平事迹及从事数学研究的辛勤劳动、刻苦钻研、追求知识和真理的精神，引导学生拿出超越自我的勇气，培养和训练他们不怕困难、勇于探索的意志品质，使他们明白为世界进步作贡献才是人生最有意义的追求。
关键词	致密性定理，柯西收敛准则，有限覆盖定理
编写时间	2024-5-30
编著者	岳毅蒙
素材形式	文字、图片等
育人主题	培养学生追求知识和真理的精神和敢于超越自我的勇气
素材长度	1626
案例正文	<p>案例一 海因里希·爱德华·海涅，德国数学家，出生于 1821 年 3 月 16 日，1838 年到柏林大学、哥廷根大学攻读，是高斯、狄利克雷的学生。1842 年在柏林大学获得哲学博士学位。1844 年任教于波恩大学，1848 年成为特别教授，同年九月被聘为哈雷-维滕贝格大学教授，1864-1864 年任校长，先后被选为普鲁士科学院通讯院士、哥廷根科学协会会员，1877 年，在高斯诞辰纪念日获得高斯奖章以表彰他对数学的贡献。他独立发现了海涅定理，提出了著名的“有限覆盖定理”。他还建立了沟通数列极限与函数极限的桥梁，给出了无理数的算术定义，他的主要著作有《球面函数指南》等。</p>  <p>案例二 博雷尔（1871 年 1 月 7 日-1956 年 2 月 3 日）法国数学家，他的一生成就甚丰，对数学分析、函数论、数论、代数、几何、数学物理、概率论等诸多分支都有杰出的贡献。在他不下 300 种作品中，有 30 余本著作多次再版，不少译成外文，他还多次获法国科学院奖，是 20 世纪第一流的数学家。他写的《发散级数论》1899 年获得法国科学院大奖，他完善了海涅（Heine）提出的覆盖定理，即现在的所谓“海涅-博雷尔定理”或“有限覆盖定理”，此定理和戴德金的“分割”法则、区</p> 

间套定理、波尔察诺-魏尔斯特拉斯聚点存在定理是等价的. 法国数学家蒙泰尔 (Montel) 曾说: “博雷尔的思想将会长久地继续在研究中发挥影响, 就像远处的星光散布到广阔的空间.” 在数学中以他的姓氏命名的有: 博雷尔函数、博雷尔测度、博雷尔变模、博雷尔集、博雷尔强大数律、博雷尔定理等等.

知识点

回顾: 定理 7.2 (Weierstrass 聚点定理) 实数轴上的任一有界无限点集 S 至少有一个聚点.

一、致密性定理与柯西收敛准则

1. 推论 (致密性定理) 有界数列必含有收敛子列.

证 设 $\{x_n\}$ 为有界数列. 若 $\{x_n\}$ 中有无限多个相等的项, 显然成立. 若数列 $\{x_n\}$ 中不含有无限多个相等的项, 则 $\{x_n\}$ 在数轴上对应的点集必为有界无限点集, 故由聚点定理, 点集 $\{x_n\}$ 至少有一个聚点, 记为 ξ . 由定义 2", 存在 $\{x_n\}$ 的一个收敛子列 (以 ξ 为极限).

2. 柯西收敛准则: 数列 $\{a_n\}$ 收敛的充要条件是: 对任给的 $\varepsilon > 0$, 存在 $N > 0$, 使得对 $m, n > N$ 有

$$|a_m - a_n| < \varepsilon.$$

证 (充分性) 先证 $\{a_n\}$ 有界, 由已知条件取 $\varepsilon = 1$, 则存在正整数 N , 则 $m = N + 1$ 及 $n > N$ 时有

$$|a_n - a_{N+1}| < 1$$

由此得 $|a_n| = |a_n - a_{N+1} + a_{N+1}| < 1 + |a_{N+1}|$. 取

$$M = \max\{|a_1|, |a_2|, \dots, |a_N|, 1 + |a_{N+1}|\}$$

则对一切的正整数 n 均有 $|a_n| \leq M$.

再证 $\{a_n\}$ 收敛, 由致密性定理, 数列 $\{a_n\}$ 有收敛子列 $\{a_{n_k}\}$, 设 $\lim_{k \rightarrow \infty} a_{n_k} = A$.

由条件及数列极限的定义, 对任给的 $\varepsilon > 0$, 存在 $K > 0$, 使得对 $m, n, k > N$ 有 $|a_m - a_n| < \varepsilon$, $|a_{n_k} - A| < \varepsilon$.

取 $m = n_k (\geq k > K)$ 时得到 $|a_n - A| \leq |a_n - a_{n_k}| + |a_{n_k} - A| < 2\varepsilon$. 所以 $\lim_{k \rightarrow \infty} a_{n_k} = A$.

二、有限覆盖定理

定义 3 设 S 为数轴上的点集, H 为开区间集合 (即 H 的每一个元素都是形如 (α, β) 的开区间). 若 S 中的任何一个点都有含在 H 中至少一个开区间内, 则称 H 为 S 的一个开覆盖, (H 覆盖 S). 若 H 中开区间的个数是无限的 (有限) 的, 则称 H 为 S 的一个无限开覆盖 (有限开覆盖).

如 $S = (a, b)$, $H = \{(x - \delta_x, x + \delta_x) | x \in (a, b)\}$, H 为 S 的一个无限开覆盖.

如 $S = (a, b)$, $H = \{(x - \delta_x, x + \delta_x) | x \in (a, b)\}$, H 为 S 的一个无限开覆盖.

定理 7.3 (海涅——博雷尔 (Heine-Borel) 有限覆盖定理) 设 H 为闭区间 $[a, b]$ 的一个 (无限) 开覆盖, 则从 H 中可选出有限个开区间来覆盖 $[a, b]$.

证: 用反证法

设定理的结论不成立, 即不能用 H 中有限个开区间来覆盖 $[a, b]$. 将 $[a, b]$ 等分为两个子区间, 其中至少有一个子区间不能用 H 中有限个开区间来覆盖. 记这个子区间为 $[a_1, b_1]$, 则 $[a_1, b_1] \subset [a, b]$, 且 $b_1 - a_1 = \frac{1}{2}(b - a)$. 再将 $[a_1, b_1]$ 等分为两个子区间, 同样, 其中至少有一个子区间不能用 H 中有限个开区间来覆盖. 记这个子区间为 $[a_2, b_2]$, 则 $[a_2, b_2] \subset [a_1, b_1]$, 且 $b_2 - a_2 = \frac{1}{2^2}(b - a)$. 依次继续得一区间列 $\{[a_n, b_n]\}$, 它满足:

$$[a_n, b_n] \supset [a_{n+1}, b_{n+1}], n = 1, 2, \dots;$$

$$b_n - a_n = \frac{1}{2^n}(b - a) \rightarrow 0 (n \rightarrow \infty),$$

即 $\{[a_n, b_n]\}$ 为闭区间套, 且其中每一个闭区间都不能用 H 中有限个

	<p>开区间来覆盖，由闭区间套定理，存在唯一的一点 ξ 使得 $\xi \in [a_n, b_n], n=1,2,\dots$，由于 H 为闭区间 $[a,b]$ 的一个(无限)开覆盖，故存在 $(\alpha, \beta) \in H$，使得 $\xi \in (\alpha, \beta)$。于是，由定理 7.1 的推论，当 n 充分大时有 $[a_n, b_n] \subset (\alpha, \beta)$。即用 H 中一个开区间就能覆盖 $[a_n, b_n]$ 矛盾。</p> <p>【思政元素】1. 面对数学的峦峰，其实所有的数学人都是数学努力进程中的无穷小量. 对那些让我们崇拜与尊敬的伟大数学家们而言, 当对比广博的数学同仁时, 他们才是数学努力进程中的无穷大量. 要想成为数学的无穷大量型人才, 第一件事就是在心理上必须解除任何的“名人未解、自己无望”的悲观研究心理障碍, 使得自身处于完全无约束的能量自由勃发状态, 然后才可能真实地验证出自己的数学价值. “技重于练, 巧重于悟”, 数学分析是数学专业的基础, 多重重视对课本概念的理解学习, 只有把地基打好打牢, 对以后的学习才会有保障. 书山有路勤为径, 学海无涯苦作舟.</p> <p>2. 有限覆盖定理告诉学生只要投入有限的时间和精力就一定能实现目标.</p>
分析评价	<p>本案例通过介绍数学家海涅和博雷尔的的生平事迹及从事数学研究的辛勤劳动、刻苦钻研、追求知识和真理的精神, 引导学生拿出超越自我的勇气, 培养和训练他们不怕困难、勇于探索的意志品质, 使他们明白为世界进步作贡献才是人生最有意义的追求. 与此同时, 数学也是一门有理性的艺术. 从数学的发展历程中可以使学生清晰地看到, 只要一个问题没有得到证明, 它就不属于真理, 而不管这个问题提出者的地位和威望如何. 如果问题得到证明, 那他的真理性便得到了认同, 不存在人微言轻的现象, 有助于完善学生的人格品质.</p>
评价者	王晓 教授, 商洛学院数学与计算机应用学院

案例编号	20031101-024
案例标题	不定积分的概念与性质
案例来源	原创
内容简介	通过介绍德国著名数学家莱布尼茨对微积分的贡献,体会数学家们凡事追求卓越与完美的工匠精神;通过介绍不定积分的概念,阐明结果与原因之间的辩证统一,提升学生认识事物的科学思维和科学素养;通过建立数学模型解决实际问题,培养学生坚持不懈、勇于钻研、严谨细致、精益求精的良好品质.
关键词	不定积分;原函数;基本积分公式
编写时间	2024-3-6
编著者	王瑞 商洛学院
素材形式	文字、图片等
育人主题	阐明结果与原因之间的辩证统一,提升学生认识事物的科学思维和科学素养,向学生传递心怀故土,不忘根本的情怀.
素材长度	1281
案例正文	<p>案例一 正如加法有其逆运算减法,乘法有其逆运算除法一样,微分法也有它的逆运算——积分法.我们已经知道,微分法的基本问题是研究如何从已知函数求出它的导函数,那么与之相反的问题是:求一个未知函数,使其导函数恰好是某一已知函数.提出这个逆问题,首先是因为它出现在许多实际问题之中.例如:已知速度求路程;已知加速度求速度;已知曲线上每一点处的切线斜率(或斜率所满足的某一规律),求曲线方程;等等.本节我们将学习到微分运算的逆运算——积分运算.</p> <p>知识点 一、原函数与不定积分</p> <p>定义1.如果在区间 I 上,可导函数 $F(x)$ 的导函数为 $f(x)$,即对任一 $x \in I$, 都有</p> $F'(x)=f(x) \text{ 或 } dF(x)=f(x)dx,$ <p>那么函数 $F(x)$ 就称为 $f(x)$(或 $f(x)dx$) 在区间 I 上的原函数.</p> <p>例如,因为 $(\sin x)'=\cos x$, 所以 $\sin x$ 是 $\cos x$ 的原函数.</p> <p>又如当 $x \in (1, +\infty)$ 时, 因为 $(\sqrt{x})'=\frac{1}{2\sqrt{x}}$, 所以 \sqrt{x} 是 $\frac{1}{2\sqrt{x}}$ 的原函数.</p> <p>提问: $\cos x$ 和 $\frac{1}{2\sqrt{x}}$ 还有其它原函数吗?</p> <p>定理 8.1 (原函数存在定理) 如果函数 $f(x)$ 在区间 I 上连续, 那么在区间 I 上存在可导函数 $F(x)$, 使对任一 $x \in I$ 都有</p>

$$F'(x)=f(x).$$

简单地说就是：连续函数一定有原函数.

定理 8.2 (1) 如果函数 $f(x)$ 在区间 I 上有原函数 $F(x)$, 那么 $f(x)$ 就有无限多个原函数, $F(x)+C$ 都是 $f(x)$ 的原函数, 其中 C 是任意常数.

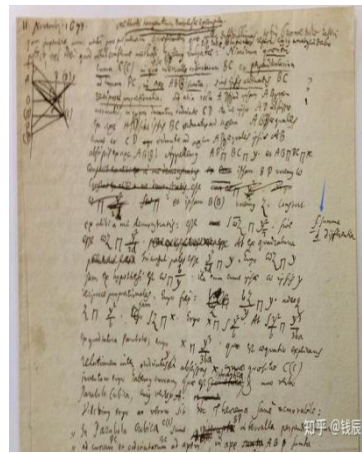
(2) $f(x)$ 的任意两个原函数之间只差一个常数, 即如果 $\Phi(x)$ 和 $F(x)$ 都是 $f(x)$ 的原函数, 则 $\Phi(x)-F(x)=C$, (C 为某个常数).

定义 2. 在区间 I 上, 函数 $f(x)$ 的带有任意常数项的原函数称为 $f(x)$ (或 $f(x)dx$) 在区间 I 上的不定积分, 记作

$$\int f(x)dx.$$

其中记号 \int 称为积分号, $f(x)$ 称为被积函数, $f(x)dx$ 称为被积表达式, x 称为积分变量.

案例二 莱布尼茨是 17 世纪德国著名哲学家、数学家, 其博学多识、涉猎广泛, 是历史上少见的通才, 谓之“百科全书式人物”. 在数学研究领域, 他把微分学和积分学紧密联系起来, 并创造了一系列优美数学符号. 在莱布尼茨的手稿中就出现了这样的简洁的数学符号“ \int ”.



莱布尼兹及其手稿

【思政元素】 介绍德国著名数学家莱布尼茨对微积分所做的贡献, 引导学生学习优秀科学家们凡事追求卓越与完美的工匠精神; 对数学坚持不懈的钻研精神, 培养学生精益求精的探索精神; 数学中简单符号的创造激发学生敢于创新的精神.

知识点 根据定义, 如果 $F(x)$ 是 $f(x)$ 在区间 I 上的一个原函数, 那么 $F(x)+C$ 就是 $f(x)$ 的不定积分, 即

$$\int f(x)dx = F(x) + C.$$

因而不定积分 $\int f(x)dx$ 可以表示 $f(x)$ 的任意一个原函数.

从不定积分的定义, 即可知下述关系:

$$\frac{d}{dx}[\int f(x)dx] = f(x),$$

或

$$d[\int f(x)dx] = f(x)dx;$$

又由于 $F(x)$ 是 $F'(x)$ 的原函数, 所以

$$\int F'(x)dx = F(x) + C,$$

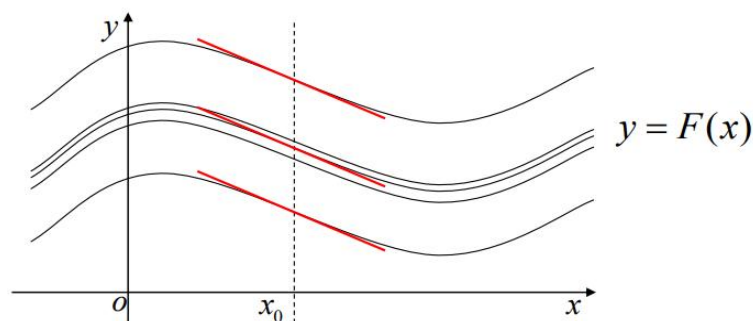
或记作

$$\int dF(x) = F(x) + C.$$

由此可见, 微分运算(以记号 d 表示)与求不定积分的运算(简称积分运算, 以记号 \int 表示)是互逆的. 当记号 \int 与 d 连在一起时, 或者抵消, 或者抵消后差一个常数.

不定积分的几何意义

若 F 是 f 的一个原函数, 则称 $y=F(x)$ 的图像为 f 的一条积分曲线. 于是, f 的不定积分在几何上表示 f 的某一积分曲线沿纵轴方向任意平移所得一切积分曲线组成的曲线族. 显然, 若在每一条积分曲线上横坐标相同的点处作切线, 则这些切线互相平行.



【思政元素】 不定积分的概念表明, 微分运算不定积分的运算(简称积分运算是互逆的, 阐明结果与原因之间的辩证统一, 提升

	<p>学生认识事物的科学思维和科学素养. 从家国情怀层面向学生传递心怀故土, 不忘根本的情怀, 从自我价值观的塑造层面, 想学生弘扬时常自省, 方能走的跟长远.</p> <p>知识点 基本积分表</p> <p>(1) $\int kdx = kx + C$ (k 是常数) (2) $\int x^\mu dx = \frac{1}{\mu+1}x^{\mu+1} + C$,</p> <p>(3) $\int \frac{1}{x} dx = \ln x + C$, (4) $\int e^x dx = e^x + C$,</p> <p>(5) $\int a^x dx = \frac{a^x}{\ln a} + C$, (6) $\int \cos x dx = \sin x + C$,</p> <p>(7) $\int \sin x dx = -\cos x + C$, (8) $\int \frac{1}{\cos^2 x} dx = \int \sec^2 x dx = \tan x + C$,</p> <p>(9) $\int \frac{1}{\sin^2 x} dx = \int \csc^2 x dx = -\cot x + C$, (10) $\int \frac{1}{1+x^2} dx = \arctan x + C$,</p> <p>(11) $\int \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} dx = \arcsin x + C$, (12) $\int \sec x \tan x dx = \sec x + C$,</p> <p>(13) $\int \csc x \cot x dx = -\csc x + C$, (14) $\int \operatorname{sh} x dx = \operatorname{ch} x + C$,</p> <p>(15) $\int \operatorname{ch} x dx = \operatorname{sh} x + C$.</p> <p>例 $\int \frac{1}{x^3} dx = \int x^{-3} dx = \frac{1}{-3+1}x^{-3+1} + C = -\frac{1}{2x^2} + C$</p> <p>【思政元素】本案例通过介绍德国著名数学家莱布尼茨对微积分的贡献, 体会数学家们凡事追求卓越与完美的工匠精神; 通过介绍不定积分的概念, 阐明结果与原因之间的辩证统一, 提升学生认识事物的科学思维和科学素养; 通过建立数学模型解决实际问题, 培养学生坚持不懈、勇于钻研、严谨细致、精益求精的良好品质.</p>
分析评价	<p>本案例通过介绍德国著名数学家莱布尼茨对微积分的贡献, 体会数学家们凡事追求卓越与完美的工匠精神; 通过介绍不定积分的概念, 阐明结果与原因之间的辩证统一, 提升学生认识事物的科学思维和科学素养; 通过建立数学模型解决实际问题, 培养学生坚持不懈、勇于钻研、严谨细致、精益求精的良好品质.</p>
评价者	王晓 教授, 商洛学院数学与计算机应用学院

案例编号	20031101-025
案例标题	不定积分
案例来源	改编
内容简介	介绍地洞深度的测量故事；“故事+投资（明星阵容+顶尖特技+烧钱宣传）”与“电影票房（或口碑）”的关系；“实力（结构性的）+人脉（非结构性的）”与“成功”的关系，通过两个案例理解原函数与导函数.
关键词	地洞测量；故事+投资；实力+人脉；原函数；导函数
编写时间	2023-3-1
编著者	卢晶 商洛学院
素材形式	文字等
育人主题	善于发现事物中的真、善、美 . 培养学生对待科学的严谨态度, 努力学习科学知识, 为国做贡献, 激发爱国热情. 当你在某一方面无所不用其极而未能达到预期效果时, 想想是不是“原函数”出了问题, 你的努力可能只是重复了无数次的“竹篮打水”.
素材长度	1249
案例正文	<p>案例一 地洞深度的测量.</p> <p>有一对父子来到山区野地里探险. 他们发现了一个巨大的地洞, 探头下望, 发现洞里漆黑一片, 深不见底. 儿子问道“: 爸爸, 你猜这个洞有多深?” 爸爸答道: “咱们可以把地上这块石头丢下去, 看看需要等多久才听得到石子撞到洞底的声音, 这样就可以计算出洞有多深了.” 儿子觉得有道理, 于是他们把那块石头抛了下去, 可是等了很长时间都没有听到回声, 最后只隐约听到微弱的溅水声. 儿子很失望地说: “这个办法好像不怎么灵嘛!” 爸爸则说: “应该可以的, 我想我们需要更大更重的石头.” 于是父子俩又搬来了一块更大的石头, 他们好不容易把那块石头搬到洞边, 丢进了洞里, 立马开始计时, 在读到第十秒的时候, 终于听到了清晰的扑通声. 让我们一起来帮这对父子粗略算算这个地洞究竟有多深.</p> <p>大石头被抛离洞口的那一刻, 时间$t=0$而它落水时, $t=0$ (声音从洞底传上来所花的时间在此忽略不计), 另外, 我们都知道地表的重力加速度 $a(t)=9.8m/s$, 由于速度函数的导数就是加速度, 那么, 反过来, 速度就是加速度的不定积分,</p>

$v(t) = \int a(t)dt = \int 9.8dt = 9.8t + C_1$ ，又大石头在洞口时的速度为 0，故 $v(0) = 0$ ，代入上式得 $C_1 = 0$ ，接下来看大石头的位置函数，同样的，位置函数是速度函数的不定积分：

$$s(t) = \int v(t)dt = \int 9.8tdt = 4.9t^2 + C_2$$

又 $t = 0$ 时，石头位于洞口，所以 $s(0) = 0$ ，代入上式得 $C_2 = 0$ ，于是位置与时间关系确定了下来，即 $s(t) = 4.9t^2$ ，由于大石头是在 $t = 10$ 时撞到水面的，代入上式得 $s(10) = 490m$ ，所以这个地洞深 490 m 真的好深呀！怪不得小石头扔进去都听不到回声。

知识点 原函数与不定积分

定义 1 设函数 $f(x), F(x)$ 在区间 I 上都有定义. 若

$$F'(x) = f(x), x \in I,$$

则称 $F(x)$ 为 $f(x)$ 在区间 I 上的一个原函数.

定理 1 设 $F(x)$ 是 $f(x)$ 在区间 I 上的一个原函数，则

$$F(x) + C$$

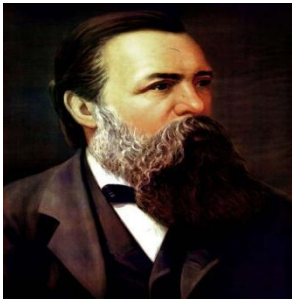

也是 $f(x)$ 在 I 上的原函数，其中 C 为任意常量函数；

定义 2 函数 $f(x)$ 在区间 I 上的全体原函数称为 $f(x)$ 在 I 上的不定积分，记作 $\int f(x)dx$ ，其中 \int 为积分号， $f(x)$ 为被积函数， $f(x)dx$ 为被积表达式， x 为积分变量.

【思政元素】 善于发现事物中蕴含的数学元素，感受为数学无处不在. 培养学生善于观察、善于思考的良好习惯.

案例二 如何解读这样的一种现象呢？我们暂且把求导视为一种规则，然后原函数视为两个部分“结构性的+非结构性的（就是那个常数 C ）”所以我们会发现，只要原函数结构性那部分不变，那么无论常数 C 变成什么样子，在求导的规则作用后都会是相同

	<p>的那个被积函数.</p> <p>这个被积函数可以视为一个结果, 而求导是达到这个结果的一个法则, 因此只要原函数“结构性”那部分不变, 那个常数 C 多大多小都没有用, 结果一定是一样的. 如果这样讲很抽象的话, 不如我们举两个例子 (都是原函数与被积函数的关系).</p> <p>1. “故事+投资 (明星阵容+顶尖特技+ 烧钱宣传)” 与 “电影票房 (或口碑)” 的关系. 一部电影, 当你发现无限烧钱可最后也不是你要的口碑票房结果的时候, 就不是投资出了问题 (即原函数中的常数 C, 非结构那部分), 而是那个“结构性”的故事出了问题, 你的故事经过每一个细节的分析后 (即微分、求导) 就不是能够赢得票房和口碑的故事, 因此也就不是一个能够赢得口碑与票房的原函数. 这样的原函数, 搭配多少 C (投资) 都无济于事. 要想让结果变化, 要改动的是“结构性”的故事那部分.</p> <p>2. “实力 (结构性的)+人脉 (非结构性的)” 与 “成功” 的关系. 当你实力有问题的情况下, 无所不用其极的社交找人脉, 最终未必能得到你想要的, 因为你做的努力都在原函数的 C 上, 经过求导的规则后 (经得起每个细节的推敲), 这个 C 是没有用的, 你的“实力”不是具有成功特质的实力, 因此搭配上再多的 C 也没用. 你需要改变的是“结构性”的那部分——实力, 让你的实力在任何细节的推敲下 (即微分、求导) 都符合成功的特质.</p> <p>【思政元素】 当你在某一方面无所不用其极而未能达到预期效果时, 想想是不是“原函数”出了问题, 你的努力可能只是重复了无数次的“竹篮打水”.</p>
分析评价	<p>案例一通过地洞深入测量的故事, 培养学生善于思考、发现数学问题, 对待科学的严谨态度; 案例二通过两个例子解释原函数和导函数的关系, 使学生对数学知识的理解更加深刻, 启发对人生的思考.</p>
评价者	王念良 教授 商洛学院数学与计算机应用学院

案例编号	20031101-026
案例标题	第一类换元积分法
案例来源	原创
内容简介	换元积分法是计算不定积分的一种非常重要的方法,但也较难掌握,通过第一类换元法定理内容的理解、例题习题的练习,告诉学生学习没有捷径,唯有一步一步脚踏实地,攻坚克难,坚持不懈,才能到达成功的顶峰.
关键词	第一类换元法(凑微分法)
编写时间	2024-3-5
编著者	王瑞 商洛学院
素材形式	文字、图片等
育人主题	培养和提升学生脚踏实地、攻坚克难、坚持不懈、自强不息的独立坚强美好品质,在例题和习题的不断练习中让学生感受熟能生巧、勤能补拙的意趣.
素材长度	875
案例正文	<p>案例一 恩格斯(1820-1895)曾指出: “在一切理论成就中,未必再有什么像 17 世纪下半叶微积分的发明那样被看作人类精神的最高胜利了”.微积分的发展历史曲折跌宕,撼人心灵,是培养人们正确世界观、科学方法论和对人们进行文化熏陶的极好素材.</p>  <p>案例二 《九章算术》收集了西汉张苍、耿寿昌、三国的刘徽等等数学先驱的数学方法和精髓,是中国古代数学发展史的重要里程碑,是世界数学史上的宝贵遗产;中国当代数学家华罗庚,他的“华氏定理”、“华氏不等式”、“华一王方法”等都是国际上著名的数学科研成果;证明了“哥德巴赫猜想”陈景润;还有在拓扑学和数学机械化领域做了奠基性工作的数学家吴文俊,他的“吴公式”、“吴示性类”、“吴示嵌类”至今仍被国际同行广泛引用.</p>  <p>知识点 一、第一类换元法(凑微分法)</p> <p>设 $f(u)$ 有原函数 $F(u)$, $u = \varphi(x)$, 且 $\varphi(x)$ 可微, 那么, 根据复合函数微分法, 有</p>

$$dF[\varphi(x)] = f[\varphi(x)]\varphi'(x)dx$$

所以

$$\begin{aligned}\int f[\varphi(x)]\varphi'(x)dx &= \int f[\varphi(x)]d\varphi(x) \\ &= \int f(u)du = \int dF(u) \\ &= \int dF[\varphi(x)] = F[\varphi(x)] + C.\end{aligned}$$

即

$$\begin{aligned}\int f[\varphi(x)]\varphi'(x)dx &= \int f[\varphi(x)]d\varphi(x) = \left[\int f(u)du \right]_{u=\varphi(x)} \\ &= F[\varphi(x)] + C\end{aligned}$$

定理 8.4 (第一换元积分法) 设函数 $f(u)$ 具有原函数, $u = \varphi(x)$ 可导, 则有换元公式

$$\int f[\varphi(x)]\varphi'(x)dx = \int f[\varphi(x)]d\varphi(x) = \int f(u)du = F[\varphi(x)] + C.$$

被积表达式中的 dx 可当作变量 x 的微分来对待, 从而微分等式 $\varphi'(x)dx = du$ 可以应用到被积表达式中. 在求积分 $\int g(x)dx$ 时, 如果函数 $g(x)$ 可以化为 $g(x) = f[\varphi(x)]\varphi'(x)$ 的形式, 那么

$$\int g(x)dx = \int f[\varphi(x)]\varphi'(x)dx = \left[\int f(u)du \right]_{u=\varphi(x)}.$$

$$\begin{aligned}\text{例 1. } \int 2 \cos 2x dx &= \int \cos 2x \cdot (2x)' dx = \int \cos 2x d(2x) \\ &= \int \cos u du = \sin u + C = \sin 2x + C.\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\text{例 2. } \int \frac{1}{3+2x} dx &= \frac{1}{2} \int \frac{1}{3+2x} (3+2x)' dx = \frac{1}{2} \int \frac{1}{3+2x} d(3+2x) \\ &= \frac{1}{2} \int \frac{1}{u} dx = \frac{1}{2} \ln |u| + C \\ &= \frac{1}{2} \ln |3+2x| + C.\end{aligned}$$

$$\text{例 3. } \int \sec x dx.$$

解 解法一

	$\begin{aligned} \text{原式} &= \int \frac{\cos x}{\sin x} dx = \int \frac{d(\sin x)}{1 - \sin^2 x} \\ &= \frac{1}{2} \ln \left \frac{1 + \sin x}{1 - \sin x} \right + C \end{aligned}$ <p>解法二</p> $\begin{aligned} \text{原式} &= \int \frac{\sec x(\sec x + \tan x)}{\sec x + \tan x} dx \\ &= \int \frac{d(\sec x + \tan x)}{\sec x + \tan x} \\ &= \ln \sec x + \tan x + C. \end{aligned}$ <p>从以上几例看到,使用第一换元积分法的关键在于把被积表达式凑成 $f(\varphi(x))\varphi'(x)dx$ 的形式,以便选取变换 $u = \varphi(x)$,化为易于积分的 $\int f(u)du$.最终不要忘记把新引入的变量还原为起始变量.</p> <p>【思政元素】1. 通过恩格斯对微积分重要性的介绍和我国数学家取得的成就,激发学生学习积分的兴趣.</p> <p>2. 告诉学生生活中有很多事情都具有相关性,遇到困难时不要着急多思考,多动脑筋主动寻找解决问题的方法.同时,在人生道路上,要遵守一定的社会规则,发现错误时要及时改正思想,重新出发.平时说话、做事情也要讲究方式方法,培养自己“化繁为简”的能力,比如和人交流的时候,学会用简洁的语言表达复杂的事,这样就可以大大提高效率和避免误会.</p> <p>3. 不定积分的第一类换元积分法是重点也是难点,告诉学生学习没有捷径,唯有一步一步脚踏实地,才能到达成功的顶峰.鼓励学生大胆尝试,勇于创新,攻坚克难,坚持不懈,做一个认真刻苦,踏实,负责的人,将来也一定是能够适应社会生活的人.引导学生善于思考,灵活处理问题.</p>
分析评价	<p>本案例换元积分法是计算不定积分的一种非常重要的方法,但也较难掌握,通过第一类换元法的学习,告诉学生学习没有捷径,唯有一步一步脚踏实地,攻坚克难,坚持不懈,才能到达成功的顶峰.</p>
评价者	王念良 教授 商洛学院数学与计算机应用学院

案例编号	20031101-027
案例标题	第二类换元积分法
案例来源	原创
内容简介	换元积分法是计算不定积分的一种非常重要的方法，但也较难掌握，通过第二类换元法的讲解，引导学生要善于思考，灵活处理问题，易于将未知转化为已知。
关键词	第二类换元积分法
编写时间	2024-3-9
编著者	王瑞 商洛学院
素材形式	文字、图片等
育人主题	培养和提升学生脚踏实地、攻坚克难、坚持不懈、自强不息的独立坚强美好品质，在例题和习题的不断练习中让学生感受熟能生巧、勤能补拙的意趣。
素材长度	956
案例正文	<p>案例一 不定积分在工程问题中有着广泛的应用. 通过不定积分, 我们可以求解各种复杂函数的原函数, 进而解决工程中的优化问题、控制系统问题以及流体动力学问题等. 不定积分的应用能够为工程师提供更为精确和可靠的数学模型, 有助于提高工程设计的可靠性和效率.</p> <p>案例二 不定积分是一种数学方法, 用于计算一个函数在一个区间内的面积. 不定积分与定积分是相反的概念, 定积分用于计算一个函数在一个区间内的累积值. 不定积分在生物科学中的应用主要包括以下几个方面:</p> <ol style="list-style-type: none"> 1. 生长模型: 不定积分可以用来描述生物体的生长过程, 包括单细胞、微生物、植物和动物等. 生长模型可以是简单的指数生长模型, 如凯恩斯模型, 或者更复杂的模型, 如洛伦兹模型. 2. 分裂模型: 不定积分可以用来描述生物体的分裂过程, 包括细胞分裂、病毒复制和基因组复制等. 分裂模型可以是简单的二次方程生长模型, 如洛伦兹模型, 或者更复杂的模型, 如卢梭模型. 3. 蛋白质折叠模型: 不定积分可以用来描述蛋白质的折叠过程, 包括蛋白质的主要结构、次要结构和潜在结构等. 蛋白质折叠模型可以是简单的热力学模型, 如赫尔辛斯坦模型, 或者更复杂的模型, 如朗普模型. 4. 基因表达模型: 不定积分可以用来描述基因的表达过程,

包括基因转录、消耗和传递等. 基因表达模型可以是简单的线性模型, 如拉夫斯基模型, 或者更复杂的模型, 如柯西模型.

知识点

第一类换元法, 是选择恰当的 $u = \varphi(x)$, $du = \varphi'(x)dx$ 将积分

$$\int f[\varphi(x)]\varphi'(x)dx$$

变换成 $\int f(u)du$, 在找 $f(u)$ 的原函数, 即可计算出积分

$$\int f[\varphi(x)]\varphi'(x)dx .$$

反过来, 对积分 $\int f(x)dx$, 也可以令 $x = \psi(t)$, 则 $dx = \psi'(t)dt$, 于是

$$\int f(x)dx = \int f[\psi(t)]\psi'(t)dt,$$

如果 $\int f[\psi(t)]\psi'(t)dt$ 容易求得, 且 $x = \psi(t)$ 的反函数存在, 即可求得原积分. 这种方法就是第二类换元法.

定理 8.5 (第二换元积分法) 设 $x = \varphi(u)$ 在 $[\alpha, \beta]$ 严格单调且可导, $\varphi'(u) \neq 0$, 又设 $f[\varphi(u)]\varphi'(u)$ 具有原函数 $F(u)$, 则换元公式

$$\int f(x)dx = F[\varphi^{-1}(x)] + c$$

其中 $u = \varphi^{-1}(x)$ 是 $x = \varphi(u)$ 的反函数.

$$\text{证 } \frac{d}{dx} F[\varphi^{-1}(x)] = \frac{dF}{du} \frac{du}{dx} = f[\varphi(u)]\varphi'(u) \frac{1}{\varphi'(u)} = f[\varphi(u)] = f(x)$$

注记: 不定积分 $\int f(x)dx$ 存在 (即 $f[\varphi(u)]\varphi'(u)$ 具有原函数 $F(u)$) 是一个必需条件, 否则结论可能不成立.

$$\text{例 1. } \int \frac{1}{\sqrt{x+1}} dx .$$

$$\text{例 2. 求 } \int \sqrt{a^2 - x^2} dx (a > 0).$$

$$\text{例 3. } \int \frac{dx}{\sqrt{x^2 - a^2}} (a > 0) .$$

$$\text{例 4. } \int \frac{dx}{x^2 \sqrt{x^2 - 1}} .$$

	<p>解 解法一</p> <p>采用第一换元积分法:</p> $\begin{aligned} \text{原式} &= \int \frac{dx}{x^3 \sqrt{1-\frac{1}{x^2}}} = \int \frac{1}{x} \cdot \frac{-1}{\sqrt{1-\frac{1}{x^2}}} d\left(\frac{1}{x}\right) \\ &= \int \frac{-u}{\sqrt{1-u^2}} du = \sqrt{1-u^2} + C \\ &= \frac{1}{x} \sqrt{x^2-1} + C \end{aligned}$ <p>解法二</p> <p>采用第二换元积分法 (令 $x = a \sec t$) :</p> $\begin{aligned} \text{原式} &= \int \frac{\sec t \cdot \tan t}{\sec^2 t \cdot \tan t} dt = \int \cos t dt \\ &= \sin t + C = \frac{1}{x} \sqrt{x^2-1} + C. \end{aligned}$ <p>【思政元素】 1. 通过不定积分在工程和生物领域的广泛深刻应用, 激发学生学习第二类换元法的兴趣.</p> <p>2. 换元法的实质是转化, 关键是构造元和设元, 理论依据是等量代换, 目的是变换研究对象, 将问题移至新对象的知识背景中去研究, 从而使复杂问题简单化. 引导学生在现实生活和工作中善于思考, 转化思路 and 方式, 灵活处理问题, 多方面思考, 就会得到简单的解决方法, 可以事半功倍.</p>
分析评价	<p>本案例不定积分在工程和生物领域的应用, 激发学生学习第二类换元法的兴趣. 通过换元积分法是计算不定积分的一种非常重要的方法, 但也较难掌握, 通过第二类换元法的讲解, 引导学生善于思考, 转化思路 and 方式灵活处理问题, 可以事半功倍.</p>
评价者	王念良 教授 商洛学院数学与计算机应用学院

案例编号	20031101-028
案例标题	分部积分法
案例来源	原创
内容简介	通过隐性地将“钉钉子精神”融入到教学中，通过“换元积分方法”与“钉钉子精神”比较，加深同学们对分部积分方法的理解与应用。在讲述的过程中每一个环节与钉钉子相比较，让同学们更易掌握抽象的“分部积分方法”，通过浅显的道理对学生进行了人生观和世界观教育。
关键词	分部积分公式，循环积分
编写时间	2024-5-20
编著者	岳毅蒙，商洛学院
素材形式	文字
育人主题	钉钉子精神，建立正确的人生观和世界观
素材长度	1080
案例正文	<p>案例一 “钉钉子精神”是习近平总书记以朴素的话语，提出的一个意蕴深远的命题。做事好比钉钉子，是要找准方向一锤一锤接着敲，才能把钉子钉实钉牢。将“分部积分方法计算不定积分”与“钉钉子精神”类比教学，学生通过类比学习更易掌握计算不定积分的方法，更深刻理解了“钉钉子”精神，深刻把握了学习的主题，隐性地对学生进行了人生观与科学方法论教育。</p> <p>知识点</p> <p>一、问题引入</p> <p>1. 已经掌握了许多类型函数的积分（已经有了基础），一些较复杂函数的积分如 $\int x \cos x dx$ 怎么算？（初心与使命）</p> <p>在哪里钉？（基础与环境）钉钉子做什么？（初心与使命）</p> <p>2. 找相应的公式与算法（分部积分公式），（准备合适的钉子与锤子（材料与工具））。</p> <p>定理（分部积分公式）</p> <p>若 $u = u(x)$ 与 $v = v(x)$ 可导，不定积分 $\int u'(x)v(x)dx$ 存在，则 $\int u(x)v'(x)dx$ 也存在，并有</p> $\int u(x)v'(x)dx = u(x)v(x) - \int u'(x)v(x)dx$



3. 如何运用公式计算一个不定积分？（如何定一颗钉子？）

3.1 计算不定积分有几个基本出发点，选择“适当函数”运用公式。（看准钉子的方向（钉子要扶正、稳））；

3.2 一步一步仔细计算、思考；每一步计算仔细后比较积分的难度有没有降低？

$$\int x \cos x dx = x \sin x - \int \sin x dx = x \sin x + \cos x + C$$

一锤一锤稳扎稳打；每锤落下应仔细观察方向有没有偏移。

3.3 计算的过程中发现将积分更复杂化了，马上转换思路，换一种选择（若钉了几锤没有进展，说明下面的环境不能钉钉子，换一个位置。）

3.4 学习要刻苦钻研，深入思考，方能学得扎实，学习不能“浅尝辄止”（对于部分较难题目经过多次积分才能找到规律）。

4. 运用公式熟练计算积分，总结各种类型，“万丈高楼平地起”，熟能生巧。

【思政元素】让同学们回忆一下第一次“钉钉子”的经历，发现学生有很多的经验分享，多数同学对自己第一次钉钉子时的感受进行了分享，让同学们畅所欲言，从这件小事我们能总结出什么样的人生哲理呢？从中引出了计算不定积分其实与“钉钉子”过程是高度吻合的，引出了“分部积分方法”的思政教学过程.对典型或一些比较困难的不定积分计算，运用类比教学方法，同学们更易掌握“分部积分方法”的思想与过程.

例 1 $\int x e^x dx$.

例 2 $\int x^2 e^x dx$.

一般地，对下列积分可用分部积分法：（其中 $Q_{n+1}(x), P_n(x)$ 为多项式函数）

$$(1) \int P_n(x) e^x dx = \int P_n(x) d e^x ;$$

$$(2) \int P_n(x) \sin x dx = - \int P_n(x) d \cos x ;$$

	<p>(3) $\int P_n(x) \cos x dx = \int P_n(x) d \sin x$;</p> <p>(4) $\int P_n(x)(\ln x)^m dx = \int (\ln x)^m dQ_{n+1}(x)$; $(Q'_{n+1}(x) = P_n(x))$</p> <p>(5) $\int P_n(x) \arcsin x dx = \int \arcsin x dQ_{n+1}(x)$;</p> <p>(6) $\int P_n(x) \arctan x dx = \int \arctan x dQ_{n+1}(x)$;</p> <p>例 3 求 $\int x \arctan x dx$.</p> <p>例 4 求 $\int e^x \sin x dx$.</p> <p>例 5 求 $\int \sec^3 x dx$.</p> <p>【思政元素】在教学中，将看似简单的“钉钉子精神”与“计算不定积分”相比照，一方面将抽象问题通俗化，便于学生理解。在教学过程中，通过大家熟悉的“钉钉子”小事，让大家分享了各自的第一次经历，以此为切入点，类比讲述了“不定积分”的计算过程。更重要的是在教学过程中通过类比与小故事分享让同学们树立了正确的人生观（要牢记初心与使命，每一阶段要有目标和方向，做事要稳扎稳打循序渐进，工作要深入钻研不要做表面工作）与科学方法论（多角度看问题，条条大道通罗马（有难有易），积少成多，熟能生巧（千里之行始于足下））。</p>
分析评价	<p>本案例主要介绍不定积分的分部积分法，将“分部积分方法计算不定积分”与“钉钉子精神”类比教学，学生通过类比学习更易掌握计算不定积分的方法，更深刻理解了“钉钉子”精神，深刻把握了学习的主题，隐性地对学生进行了人生观与科学方法论教育。</p>
评价者	<p>王晓 教授，商洛学院数学与计算机应用学院</p>

案例编号	20031101-029
案例标题	有理函数的不定积分
案例来源	原创
内容简介	通过介绍微积分的发展历史，可以培养学生正确世界观、科学方法论和对学生进行文化熏陶，再对有理函数和有理函数的积分法进行介绍，通过讨论得到解决有理函数的一般步骤，首先要将有理式分解为多项式与部分分式之和，其次对所得到的分解式逐项积分.有理函数的原函数必是有理函数、对数函数与反正切函数的有理组合.
关键词	有理函数；积分计算方法
编写时间	2023-12-20
编著者	岳毅蒙，商洛学院
素材形式	文字、图片等
育人主题	培养学生的科学精神以及正确的世界观和科学方法论
素材长度	1067
案例正文	<p>案例一 公元前3世纪古希腊的数学家、力学家阿基米德(公元前287—前212)的著作《圆的测量》和《论球与圆柱》中就已含有微积分的萌芽，他在研究解决抛物线下的弓形面积、螺线下的面积和旋转双曲线的体积的问题中就隐含着近代积分的思想.</p> <p>案例二 古代中国微积分的萌芽：《周髀算经》、《九章算术》.《周髀算经》原名《周髀》，算经的十书之一，是古老的天文学和数学著作，主要阐明当时的盖天说和四分历法.唐初规定它为国子监明算科的教材之一，故改名《周髀算经》.《周髀算经》中最著名的是提出了“勾股定理”.书的开头有这样一段：昔者周公问于商高曰：窃闻乎大夫善数也.请问古者包牺立周天历度，夫天不可阶而升，得不可的尺寸而度，请问数安从出？商高曰：数之法出于圆方，圆出于方，方出于矩，矩出于九九八十一，故折矩以为勾广三，股修四，径隅五.《九章算术》内容极为丰富，汇总了中国先秦至汉代的所有数学成就，是古代中国以至东方的第一部自成体系的数学巨著.全书分为九章，共收有246个数学问题并提供其解</p>



法，每题都由问，答，术三部分组成，这些算法要比欧洲同类算法早1500多年，对世界数学发展产生了重要影响.本书内容涉及算术，代数，几何等诸多领域，并与实际生活紧密相联，充分体现了中国人的数学观和生活观.

知识点

一、有理函数的不定积分

有理函数的一般形式为：

$$R(x) = \frac{P(x)}{Q(x)} = \frac{a_0x^n + a_1x^{n-1} + \cdots + a_n}{b_0x^m + b_1x^{m-1} + \cdots + b_m}.$$

其中 n, m 为非负整数， a_0, a_1, \cdots, a_n 与 b_0, b_1, \cdots, b_m 都是常数，且 $a_0 \cdot b_0 \neq 0$. 若 $m > n$ ，则称 $R(x)$ 为真分式；若 $m \leq n$ ，则称 $R(x)$ 为假分式.

结论：假分式=多项式+真分式.

因此，对有理函数的积分，只要讨论真分式的积分即可.

重要结论：任何一个有理真分式必定可以表示为若干个形如（称为部分分式）：

$$(1) \quad \frac{A}{x-a};$$

$$(2) \quad \frac{A}{(x-a)^k}; \quad (k \geq 2)$$

$$(3) \quad \frac{Ax+B}{x^2+px+q} \quad (p^2-4q < 0);$$

$$(4) \quad \frac{Ax+B}{(x^2+px+q)^k} \quad (p^2-4q < 0) \quad (k \geq 2).$$

的真分式之和，其中 A, B, a, p, q 为常数， k 为正整数.

因此，对有理真分式的积分只要讨论上述四种形式的真分式的积分即可.

$$(1) \quad \int \frac{dx}{x-a} = \ln|x-a| + C.$$

$$(2) \int \frac{dx}{(x-a)^k} = \frac{1}{(1-k)(x-a)^{k-1}} + C, \quad (k > 1).$$

$$(3) \int \frac{Ax+B}{x^2+px+q} dx = \int \frac{Ax+B}{\left(x+\frac{p}{2}\right)^2 + \frac{4q-p^2}{4}} dx, \quad \text{令 } t = x + \frac{p}{2}, \text{ 并记}$$

$$r^2 = \frac{4q-p^2}{4}, \quad N = B - \frac{pA}{2}, \quad \text{则}$$

$$\begin{aligned} \int \frac{Ax+B}{x^2+px+q} dx &= \int \frac{Ax+B}{\left(x+\frac{p}{2}\right)^2 + \frac{4q-p^2}{4}} dx = A \int \frac{tdt}{t^2+r^2} + N \int \frac{dt}{t^2+r^2} \\ &= \frac{A}{2} \ln(t^2+r^2) + \frac{N}{r} \arctan \frac{t}{r} + C. \end{aligned}$$

(4) 同 (3) 可得 ($k \geq 2$),

$$\begin{aligned} \int \frac{Ax+B}{(x^2+px+q)^k} &= A \int \frac{tdt}{(t^2+r^2)^k} + N \int \frac{dt}{(t^2+r^2)^k} \\ &= \frac{A}{2(1-k)(t^2+r^2)^{k-1}} + N \int \frac{dt}{(t^2+r^2)^k}. \end{aligned}$$

记 $I_k = \int \frac{dt}{(t^2+r^2)^k}$, 则

$$\begin{aligned} I_k &= \frac{1}{r^2} \int \frac{(t^2+r^2)-t^2}{(t^2+r^2)^k} dt = \frac{1}{r^2} I_{k-1} - \frac{1}{r^2} \int \frac{t^2}{(t^2+r^2)^k} dt \\ &= \frac{1}{r^2} I_{k-1} + \frac{1}{2r^2(k-1)} \int td\left(\frac{1}{(t+r)^{k-1}}\right) \\ &= \frac{1}{r^2} I_{k-1} + \frac{1}{2r^2(k-1)} \left[\frac{t}{(t^2+r^2)^{k-1}} - I_{k-1} \right], \end{aligned}$$

于是, 有递推公式

$$I_k = \frac{t}{2r^2(k-1)(t^2+r^2)^{k-1}} + \frac{2k-3}{2r^2(k-1)} I_{k-1}.$$

将这些结果代回, 即可求得所求积分.

例 1 求 $\int \frac{x^2+1}{(x^2-2x+2)^2} dx$.

【思政元素】 1. 微积分的发展历史曲折跌宕, 撼人心灵, 可以培养学生正确世界观、科学方法论和对学生进行文化熏陶.

	<p>2.实践出真知,今后不管从事什么工作,学会在实践中发现问题,同时,运用所学的数学思想、数学精神、研究方法和看问题的角度等去解决问题,会使人受益终身收益.</p> <p>3.告诉同学们要开阔眼界,化繁为简,大事化小,提升学生的解决问题的能力.在人生道路上遇到问题时,根据已有知识及客观条件综合做出判断,才能使问题得到解决.</p> <p>4.想要熟练的运用这些公式解决不定积分的计算问题,就要不断的进行实践应用,尝试综合运用已有知识和经验解决现实问题,在做中学,在学中做,这就是实践的意义.</p>
分析评价	<p>本案例通过换元积分法的学习,鼓励学生大胆尝试,勇于创新,攻坚克难,坚持不懈,强调高等数学能学好的人,一定是一个认真刻苦、踏实、负责的人,将来一定是受社会欢迎的人,引导学生善于思考,灵活处理问题,通过数学家的故事培养学生的爱国情怀.</p>
评价者	<p>王晓 教授, 商洛学院数学与计算机应用学院</p>

案例编号	20031101-030
案例标题	定积分的概念
案例来源	原创
内容简介	讨论穷竭法和割圆术的异同,探求曲边梯形的面积与变力所做的功两个经典案例,掌握定积分的分割、近似替换、求和、取极限四个步骤,理解用无限的过程处理有限的问题、用离散的过程逼近连续、以直代曲的思想方法,建构定积分的概念.通过观察细分过程,培养学生观察力、想象力、归纳总结能力;通过由繁化简、由难入易、由已知探索未知等过程,提升学生分析问题和解决问题的能力,培养学生的沟通能力和知识迁移能力.
关键词	定积分,黎曼积分和,黎曼可积
编写时间	2024-5-20
编著者	岳毅蒙, 商洛学院
素材形式	文字、图片等
育人主题	利用数学历史知识培养学生爱国情怀和以直代曲的辩证思维能力.
素材长度	1505
案例正文	<p>案例一 穷竭法是古希腊时提出的一种求图形面积的方法,例如要求圆的面积,先做内接于圆的一系列多边形,计算它们的面积,再将多边形挖去,使剩下的面积任意小,这样做出的多边形面积就穷竭了圆的面积.同样中国古代数学家刘徽提出的割圆术“割之弥细,所失弥少,割之又割,以至于不可割,则与圆合体,而无所失矣.”已经包含了朴素的极限思想和无穷思想.从计算角度讲,刘徽的成就高于西方,但西方数学中早就有极限思想的萌芽,中国对抽象的思辨和逻辑并不是特别在意,而是侧重于“用”.</p> <div data-bbox="981 880 1359 1176" data-label="Image"> </div> <p>知识点</p> <p>一、定积分问题举例</p> <p>1. 曲边梯形的面积</p> <p>设 f 为闭区间 $[a, b]$ 上的连续函数,且 $f(x) \geq 0$, 由曲线 $y = f(x)$, 直线 $x = a$, $x = b$ 以及 x 轴所围成的平面图形 (如图), 称为曲边梯形, 如何求解该曲边梯形的面积呢?</p> <p>借助这种类似的办法来求解曲边梯形面积, 具体如下:</p> <div data-bbox="997 1556 1316 1825" data-label="Figure"> </div>

(1) 分割

在区间 $[a, b]$ 内插入任意 $n-1$ 个分点:

$$a = x_0 < x_1 < x_2 < \cdots < x_{n-1} < x_n = b$$

将区间 $[a, b]$ 分成 n 个小区间, 记小区间 $[x_{i-1}, x_i]$ 的长度为 Δx_i .再用直线 $x = x_i$, $i = 1, 2, \dots, n-1$ 把曲边梯形分成 n 个小曲边梯形.

(2) 近似

在每个小区间 $[x_{i-1}, x_i]$ 上任取一点 ξ_i , 以 $[x_{i-1}, x_i]$ 为底, $f(\xi_i)$ 为高的小矩形.当分割 $[a, b]$ 的分点较多较细密时, 由于 f 为连续函数, 它在每个小区间上的值变化不大, 从而可用这些小矩形近似替代小曲边梯形的面积, 即第 i 个小曲边梯形面积为:

$$\Delta S_i \approx f(\xi_i)\Delta x_i, \quad i = 1, 2, \dots, n.$$

(3) 求和

把所有小矩形面积相加, 得整个曲边梯形面积 S 的近似值, 即:

$$S = \sum_{i=1}^n \Delta S_i \approx \sum_{i=1}^n f(\xi_i) \cdot \Delta x_i$$

(4) 取极限

将区间 $[a, b]$ 无限细分, 即 $\|T\| = \max_{1 \leq i \leq n} \{\Delta x_i\} \rightarrow 0$, 求上述和式的极

限就是曲边梯形的面积, 即: $S = \lim_{\|T\| \rightarrow 0} \sum_{i=1}^n f(\xi_i)\Delta x_i$.

2. 变力沿直线做功

设质点受力 F 的作用沿 x 轴由点 a 移动到点 b , 并设 F 处处平行于 x 轴, 此时 F 对质点所做的功 W 该如何计算?

(1) 分割

把 $[a, b]$ 细分为 n 个小区间 $[x_{i-1}, x_i]$ 并在每个小区间 $[x_{i-1}, x_i]$ 上任取一点 ξ_i .

(2) 近似

故在很小的一段位移区间 $[a, b]$ 上 $F(x)$ 可以近似地看作一常量. 即

$$F(x) \approx F(\xi_i), \quad x \in [x_{i-1}, x_i]$$

(3) 求和

质点从 x_{i-1} 位移到 x_i 时, 力 F 所做的功就近似等于 $F(\xi_i)\Delta x_i$, 从而

$$W \approx \sum_{i=1}^n F(\xi_i)\Delta x_i$$

(4) 取极限

若将位移 $[a, b]$ 上无限细分, 令 $\|T\| = \max_{1 \leq i \leq n} \{\Delta x_i\} \rightarrow 0$, 取极限得

$$W \approx \lim_{\|T\| \rightarrow 0} \sum_{i=1}^n F(\xi_i)\Delta x_i$$

通过求曲边梯形的面积和变速直线运动的路程, 了解定积分的背景; 借助几何手段直观理解定积分的概念和基本思想, 学会用“分割、近似、求和、取极限”的方法来解决“非均匀分布总量的问题”。

抛开上述问题的具体意义, 抓住它们在数量关系上共同的本质与特性加以概括, 就抽象出下述定积分的定义.

定义 1 设闭区间 $[a, b]$ 上有 $n-1$ 个点, 依次为

$$a = x_0 < x_1 < x_2 < \dots < x_{n-1} < x_n = b$$

它们把区间 $[a, b]$ 分成 n 个小区间 $\Delta_i = [x_{i-1}, x_i], i = 1, 2, \dots, n$. 这些分点或这些闭子区间构成对 $[a, b]$ 的一个分割, 记为 $T = \{\Delta_1, \Delta_2, \dots, \Delta_n\}$, 小区间 Δ_i 的长度为 $\Delta x_i = x_i - x_{i-1}$, 并记 $\|T\| = \max_{1 \leq i \leq n} \{\Delta x_i\}$, 称为分割 T 的模.

定义 2 设 f 是定义在 $[a, b]$ 上的一个函数, 对于 $[a, b]$ 的一个分割 $T = \{\Delta_1, \Delta_2, \dots, \Delta_n\}$, 任取点 $\xi_i \in \Delta_i, i = 1, 2, \dots, n$, 并作和式


$$\sum_{i=1}^n f(\xi_i)\Delta x_i$$

称此和式为函数 f 在 $[a, b]$ 上的一个积分和, 也称黎曼和.

定义 3 设 f 是定义在 $[a, b]$ 上的一个函数, J 是一个确定的实数, 若对任给的正数 ε , 总存在某一正数 δ , 使得对 $[a, b]$ 的任何分割 T , 以及在其上任意选取的点集 $\{\xi_i\}$, 只要 $\|T\| < \delta$, 就有

$$\left| \sum_{i=1}^n f(\xi_i)\Delta x_i - J \right| < \varepsilon$$

	<p>则称函数 f 在 $[a,b]$ 上可积或黎曼可积, 数 J 称为 f 在 $[a,b]$ 上的定积分或黎曼积分, 记作</p> $J = \int_a^b f(x)dx .$ <p>其中 $f(x)$ 叫做被积函数, $f(x)dx$ 叫做被积表达式, x 叫做积分变量, $[a,b]$ 叫做积分区间, a,b 分别称为积分下限、积分上限, $\sum_{i=1}^n f(\xi_i)\Delta x_i$ 称为 $f(x)$ 的积分和.</p> <p>【思政元素】1.通过定积分概念的教学中, 使学生理解定积分的本质, 培养学生的数学思维, 激发学生的想象力和创造力, 提高解决实际问题的能力是非常重要的.在学习过程中可以培养学生严谨深入的科学精神.</p> <p>2.定积分定义中“变与不变, 近似与精确”的思想可以向学生揭示辩证唯物主义思想中量变到质变的本质规律.在整堂课程中贯穿以不变代变、化整为零、积零为整的哲学思想, 揭示概念中的辩证关系.</p> <p>3.通过“曲边梯形的面积”和“变速直线运动物体的路程”求解, 以直代曲, 不仅增强学生对极限思想的理解和不规则量的求法的把握, 同时也加强学生对现实世界客观现象的认知, 培养学生客观辩证唯物主义和谐观.</p> <p>4.介绍数学的名人轶事能够帮助学生对其成长追本溯源, 也潜移默化地给予他们意外的收获和前进的榜样, 并借此引导学生树立高远的志向, 历练敢于担当的精神.</p>
分析评价	<p>本案例由特殊到一般的数学思想, 通过对两个实际问题的分析与解决, 抽象出定积分的定义, 同时也借助于几何直观让学生体会定积分的基本思想, 这样的教学设计比较适合学生的学情, 因此学生对定积分的理解很透彻, 几何意义也顺其自然地得出. 通过例题的设计, 学生熟练地运用“四部曲”来求定积分, 也加深了对定义的理解与深化.</p>
评价者	<p>王晓 教授, 商洛学院数学与计算机应用学院</p>

案例编号	20031101-031
案例标题	可积的必要条件
案例来源	原创
内容简介	通过介绍德国著名数学家狄利克雷对积分的贡献,体会数学家们凡事追求卓越与完美的工匠精神;通过介绍可积的必要条件,阐明结果与原因之间的辩证统一,提升学生认识事物的科学思维和科学素养;通过对可积条件的证明,培养学生坚持不懈、勇于钻研、严谨细致、精益求精的良好品质.
关键词	可积的必要条件, 可积的充要条件
编写时间	2023-11-20
编著者	岳毅蒙, 商洛学院
素材形式	文字、图片等
育人主题	培养学生认识事物的科学思维和科学素养以及坚韧不拔的科研精神
素材长度	1000
案例正文	<p>案例一 狄利克雷(Dirichlet)是德国数学家, 1805年2月13日生于迪伦, 1859年5月5日卒于哥廷根.狄利克雷出生于一个具有法兰西血统的家庭.自幼喜欢数学, 在年少时将零用钱积攒起来买数学书阅读.中学毕业后, 父母希望他学习法律, 但狄利克雷却决心攻读数学.他先在迪伦学习, 后到哥廷根受业于高斯.1822年到1827年间旅居巴黎当家庭教师.在此期间, 他参加了以傅里叶为首的青年数学家小组的活动, 深受傅里叶学术思想的影响.1827年在波兰布雷斯劳大学任讲师.1829年任柏林大学讲师, 1839年升为教授.1855年, 高斯逝世后, 他作为高斯的继任者被哥廷根大学聘任为教授, 直至逝世.1831年, 他被选为普鲁士科学院院士, 1855年被选为英国皇家学会会员.</p> <p>知识点</p> <p>一、可积的必要条件</p> <p>定理 9.2 若函数 $f(x) \in R[a, b]$, 则在区间 $[a, b]$ 上必定有界.</p> <p>证明方法: 反证法</p> <p>回顾 $f(x)$ 在区间 $[a, b]$ 上界的定义, 回顾定积分定义中的两个“任意” (插入点任意, 介点选取任意)</p> 

例 1 讨论 Dirichlet 函数 $D(x)$ 在区间 $[0,1]$ 上的可积性.

二、可积的充要条件

1. 思路与方案

思路：鉴于积分和与分法和介点有关，先简化积分和. 用相应于分法 T 的“最大”和“最小”的两个“积分和”去双逼一般的积分和，即用极限的双逼原理考查积分和有极限，且与分法 T 及介点 ξ_i 无关的条件.

方案：定义上和 $S(T)$ 和下和 $s(T)$. 研究它们的性质和当时有相同极限的充要条件.

设 $T = \{ \Delta x_i \mid i = 1, 2, \dots, n \}$ 为对 $[a, b]$ 的任一分割. 由 $f(x)$ 在 $[a, b]$ 上有界知，它在每个 Δx_i 上存在上、下确界：

$$M_i = \sup_{x \in \Delta x_i} f(x), \quad m_i = \inf_{x \in \Delta x_i} f(x), \quad i = 1, 2, \dots, n.$$

作和

$$S(T) = \sum_{i=1}^n M_i \Delta x_i, \quad s(T) = \sum_{i=1}^n m_i \Delta x_i,$$

分别称为 $f(x)$ 关于分割 T 的上和与下和（或称达布上和与达布下和，统称达布和）任给 $\xi_i \in \Delta x_i$, $i = 1, 2, \dots, n$, 显然有

$$s(T) \leq \sum f(\xi_i) \Delta x_i \leq S(T).$$

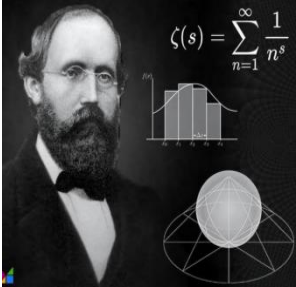
说明：与积分和相比，达布和只与分割 T 有关，而与点 ξ_i 的取法无关.

2. Darboux 和：

以下总设函数 $f(x)$ 在区间 $[a, b]$ 上有界. 并设 $m \leq f(x) \leq M$, 其中 m 和 M 分别是函数 $f(x)$ 在区间 $[a, b]$ 上的下确界和上确界，指出 Darboux 和未必是积分和. 但 Darboux 和由分法 T 唯一确定.

分别用 $S(T)$ 、 $s(T)$ 和 $\Sigma(T)$ 记相应于分法 T 的上（大）和、下（小）

	<p>和与积分和.积分和 $\Sigma(T)$ 是数集(多值). 但总有 $s(T) \leq \Sigma(T) \leq S(T)$, 因此有 $s(T) \leq S(T)$.</p> <p>定理 9.3 (可积准则) 函数 f 在 $[a,b]$ 上可积的充要条件是: 对任意的 $\varepsilon > 0$, 总存在相应的分割 T, 使得</p> $S(T) - s(T) < \varepsilon.$ <p>设 $\omega_i = M_i - m_i$, 并称为 $f(x)$ 在 Δx_i 上的振幅, 有必要时记为 ω_i^f. 则有</p> $S(T) - s(T) = \sum_{i=1}^n \omega_i \Delta x_i.$ <p>定理 9.3' 函数 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上可积 \Leftrightarrow 对 $\forall \varepsilon > 0$, $\exists T$, 使得</p> $\sum_{i=1}^n \omega_i \Delta x_i < \varepsilon$ <p>不等式 $S(T) - s(T) < \varepsilon$ 或 $\sum_{i=1}^n \omega_i \Delta x_i < \varepsilon$ 的几何意义: 若函数 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上可积, 则包围曲线 $y = f(x)$ 的一系列小矩形面积之和可以达到任意小, 只要分割充分的细; 反之亦然.</p> <p>【思政元素】 通过介绍德国著名数学家狄利克雷对微积分的贡献, 体会数学家们凡事追求卓越与完美的工匠精神; 通过介绍不定积分的概念, 阐明结果与原因之间的辩证统一, 提升学生认识事物的科学思维和科学素养; 通过建立数学模型解决实际问题, 培养学生坚持不懈、勇于钻研、严谨细致、精益求精的良好品质.</p>
分析评价	<p>本案例通过介绍德国著名数学家狄利克雷对积分的贡献, 体会数学家们凡事追求卓越与完美的工匠精神; 通过介绍可积的条件, 阐明结果与原因之间的辩证统一, 提升学生认识事物的科学思维和科学素养; 通过对可积条件的证明, 培养学生坚持不懈、勇于钻研、严谨细致、精益求精的良好品质.</p>
评价者	王晓 教授, 商洛学院数学与计算机应用学院

案例编号	20031101-032
案例标题	可积的充分条件
案例来源	原创
内容简介	熟悉可积的充分条件及证明过程,并且通过介绍德国著名数学家黎曼的生平与成就,让学生们深刻感受到黎曼不仅开创了解析数论的新时期,也对单复变函数论的发展有深刻的影响.通过了解黎曼的事迹,培养学生吃苦耐劳,一丝不苟的钻研精神.
关键词	可积的充分条件,黎曼函数
编写时间	2023-10-20
编著者	岳毅蒙,商洛学院
素材形式	文字、图片等
育人主题	培养学生吃苦耐劳的意志品质和一丝不苟的钻研精神.
素材长度	1020
案例正文	<p>案例一 波恩哈德·黎曼(Georg Friedrich Bernhard Riemann, 1826年9月17日—1866年7月20日),是德国著名的数学家,他在数学分析和微分几何方面作出过重要贡献,他开创了黎曼几何,并且给后来爱因斯坦的广义相对论提供了数学基础.黎曼的著作主要有:《单复变函数一般理论的基础》《关于以几何学为基础的假设》《借助三角级数表示函数的可能性》《数学物理的微分方程》(与韦伯合著)、《椭圆函数论》《引力、电、磁》《不超过已知数的素数的数量》等.</p>  <p>知识点</p> <p>1. (可积函数的充分条件) 闭区间上的连续函数必可积.</p> <p>定理 9.4 若函数 $y = f(x)$ 是 $[a, b]$ 上的连续函数,则函数 $y = f(x)$ 是 $[a, b]$ 上可积.</p> <p>分析: 应用闭区间上的连续函数一致连续,根据定积分的定义,应用可积准则.</p> <p>证: 由于 f 在闭区间 $[a, b]$ 上连续,因此在 $[a, b]$ 上一致连续,这就是说,任给 $\varepsilon > 0$, 存在 $\delta > 0$, 对 $[a, b]$ 中任意两点 x', x'', $x' - x'' < \delta$, 便有</p>

$$|f(x') - f(x'')| < \frac{\varepsilon}{b-a}.$$

所以只要对 $[a, b]$ 所作的分割 T 满足 $\|T\| < \delta$, 在 T 所属的任一小区间 Δ_i 上, 就要使 f 的振幅满足

$$\omega_i = M_i - m_i = \sup |f(x') - f(x'')| \leq \frac{\varepsilon}{b-a}$$

从而导致

$$\sum \omega_i \Delta x_i \leq \frac{\varepsilon}{b-a} \sum \Delta x_i = \varepsilon.$$

2. 闭区间上有界且仅有有限个间断点的函数可积.

定理 9.5 若函数 $y = f(x)$ 是 $[a, b]$ 上的有界且仅有有限个间断点的函数, 则函数 $y = f(x)$ 是 $[a, b]$ 上可积.

分析: 不失一般性, 假设函数 $y = f(x)$ 在 $[a, b]$ 上仅有一个间断点的情形, 并假设该间断点为 b , 取特殊的分割, 应用可积准则.

推论 1 闭区间上按段连续函数必可积.

推论 2 设函数 $f(x)$ 在区间 $[a, b]$ 上有界且其间断点仅有有限个聚点, 则函数 $f(x)$ 在区间 $[a, b]$ 上可积.

3. 闭区间上的单调函数必可积.

定理 9.6 若函数 $y = f(x)$ 是 $[a, b]$ 上的单调函数, 则函数 $y = f(x)$ 在 $[a, b]$ 上可积.

例 1 用两种方法证明 $f(x) = \begin{cases} 0, & x = 0 \\ \frac{1}{n}, & \frac{1}{n+1} < x < \frac{1}{n}, n = 1, 2, \dots \end{cases}$, 在 $[0, 1]$

上可积.

例 2 证明黎曼函数 $f(x) = \begin{cases} \frac{1}{q} & x = \frac{p}{q}, (p, q) = 1, q > p \\ 0 & x = 0, 1 \text{ 和 } (0, 1) \text{ 内的无理点} \end{cases}$ 在区间

$[0, 1]$ 内可积, 且 $\int_0^1 f(x) dx = 0$.

【思政元素】1. 通过了解黎曼的故事, 让学生们体会到他的理论

	<p>像一盏明灯，照亮了数学史上的一个又一个黑暗角落.他不仅以独特的眼光和深邃的思维改变了数学的面貌，而且影响了物理、工程学等多个学科的发展.通过走进这位数学巨匠的世界，一同感受他跨越时空的数学之美.</p> <p>2.引导学生体会在研究定积分充分条件中从特殊到一般的思维方法，感受数学之美.</p>
分析评价	<p>本案例通过介绍德国著名数学家黎曼的生平与成就，让学生们深刻感受到黎曼不仅开创了解析数论的新时期，也对单复变函数论的发展有深刻的影响.他是世界数学史上最具独创精神的数学家之一，黎曼的著作不多，但却异常深刻，极富于对概念的创造与想象.通过了解黎曼的事迹，培养学生吃苦耐劳，一丝不苟的钻研精神.</p>
评价者	<p>王晓 教授，商洛学院数学与计算机应用学院</p>

案例编号	20031101-033
案例标题	积分中值定理
案例来源	原创
内容简介	通过介绍德国著名数学家莱布尼茨对微积分的贡献,体会数学家们凡事追求卓越与完美的工匠精神;通过介绍定积分中值定理,阐明结果与原因之间的辩证统一,提升学生认识事物的科学思维和科学素养;培养学生坚持不懈、勇于钻研、严谨细致、精益求精的良好品质.
关键词	积分第一中值定理, 平均值
编写时间	2024-5-20
编著者	岳毅蒙, 商洛学院
素材形式	文字、图片等
育人主题	培养学生工匠精神和文化自信
素材长度	781
案例正文	<p>案例一 莱布尼茨与中国文化: 17世纪德国的卓越哲学家、数学家莱布尼茨(1646-1716),生活的年代(清顺治三年至康熙五十五年)正值中国清朝统治时期的康熙时代,那时有一批欧洲传教士在中国传教,他们把西方的一些科学知识带入中国,也陆续把中国的许多传统文化传入西方,莱布尼茨对中国文化的浓厚兴趣持续于他的一生,他数十年如一日,坚持不懈地开展中西文化交流。</p> <p>知识点</p> <p>定理 9.7 (积分第一中值定理) 若 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上连续,则至少存在一点 $\xi \in [a,b]$,使得</p> $\int_a^b f(x)dx = f(\xi)(b-a)$ <p>根据介值定理和连续性给出证明。</p> <p>注:积分第一中值定理的几何意义:若 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上非负连续,则 $y=f(x)$ 在 $[a,b]$ 上的曲边梯形的面积等于以 $f(\xi) = \frac{1}{b-a} \int_a^b f(x)dx$ 为高, $[a,b]$ 为底的矩形的面积。</p> <p>一般地,称 $\frac{1}{b-a} \int_a^b f(x)dx$ 为 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上的平均值。</p> <p>例 1 试求 $f(x) = \sin x$ 在 $[0,\pi]$ 上的平均值。</p>



定理 9.8 (推广的积分第一中值定理) 若 $f(x)$ 和 $g(x)$ 都在 $[a, b]$ 上连续, 且 $g(x)$ 在 $[a, b]$ 上不变号, 则至少存在一点 $\xi \in [a, b]$, 使得

$$\int_a^b f(x)g(x)dx = f(\xi)\int_a^b g(x)dx.$$

类似于定理 1 的证明, 给出定理的证明.

说明: 当 $g(x) \equiv 1$ 时, 即为积分第一中值定理.

注: 事实上, 积分第一中值定理和推广的积分第一中值定理中的点 ξ 必能 $\xi \in (a, b)$.

例 2 设 $f, g \in R[a, b]$. 试证明:

$$\lim_{\|T\| \rightarrow 0} \sum_{i=1}^n f(\xi_i)g(\eta_i)\Delta x_i = \int_a^b fgdx.$$

其中 ξ_i 和 η_i 是 Δ_i 内的任二点, $T = \{\Delta_i\}, i = 1, 2, \dots, n$.

例 3 比较积分 $\int_0^1 e^{\sqrt{x}} dx$ 与 $\int_0^1 e^{x^2} dx$ 的大小.

例 4 设 $f \in C[a, b]$, $f(x) \geq 0$ 但 $f(x) \neq 0$. 证明 $\int_a^b f(x)dx > 0$.

例 5 证明不等式 $\frac{\pi}{2} < \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{1}{\sqrt{1 - \frac{1}{2}\sin^2 x}} dx < \frac{\pi}{\sqrt{2}}$.

证明: 所证不等式为 $\int_0^{\frac{\pi}{2}} 1 dx < \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{1}{\sqrt{1 - \frac{1}{2}\sin^2 x}} dx < \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sqrt{2} dx$, 只要

证明在 $[0, \frac{\pi}{2}]$ 上成立不等式 $1 \leq (1 - \frac{1}{2}\sin^2 x)^{-\frac{1}{2}} < \sqrt{2}$ 且等号不恒成立,

则由性质 4 和上例得所证不等式.

例 6 证明 $\lim_{n \rightarrow \infty} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^n x dx = 0$.

积分中值定理在应用中所起到的重要作用是可以使积分号去掉, 或者使复杂的被积函数化为相对简单的被积函数, 从而使问题简化. 因此, 对于证明有关题设中含有某个函数积分的等式或不等式, 或者要证的结论中含有定积分, 或者所求的极限式中含有定积分时, 一般

	<p>应考虑使用积分中值定理，去掉积分号，或者化简被积函数.</p> <p>【思政元素】1. 介绍德国著名数学家莱布尼茨对微积分所做的贡献，引导学生学习优秀科学家们凡事追求卓越与完美的工匠精神；对数学坚持不懈的钻研精神，培养学生精益求精的探索精神；数学中简单符号的创造激发学生敢于创新的精神.</p> <p>2. 通过积分中值定理体会数学分析中的转化思想，化复杂为简单，抓住事物的本质.</p>
分析评价	<p>本案例通过介绍德国著名数学家莱布尼茨对微积分的贡献，体会数学家们凡事追求卓越与完美的工匠精神；通过介绍定积分中值定理，阐明结果与原因之间的辩证统一，提升学生认识事物的科学思维和科学素养；培养学生坚持不懈、勇于钻研、严谨细致、精益求精的良好品质.</p>
评价者	<p>王晓 教授，商洛学院数学与计算机应用学院</p>

案例编号	20031101-034
案例标题	微积分学基本定理
案例来源	原创
内容简介	通过学习微积分学基本定理,使同学们体会微积分基本定理中所蕴含的“对立统一”的哲学思想,可以延伸到事物的两面性,结合党史、军史中的典型案例,引导学生以发展的观点看问题,正确对待人生道路上的挫折与困难,失意时不气馁,得意时不忘形,脚踏实地,奋勇前行.
关键词	变限积分,原函数存在定理
编写时间	2022-5-20
编著者	岳毅蒙,商洛学院
素材形式	文字、图片等
育人主题	培养学生对立统一的哲学思想以及如何正确对待挫折与困难.
素材长度	998
案例正文	<p>案例一 微积分基本定理作为数学分析的核心定理,是微积分这门学科建立的标志.它揭示了微分与积分这对矛盾的内在联系和转化规律,使微分学与积分学成为一门统一的学科;微积分基本定理是联系导数、微分、不定积分、定积分的桥梁和纽带,具有重要的理论意义和实用价值.微积分基本定理从发现到形成现在的形式,跨度将近</p>  <p>两个世纪,大致分为发现、创立和完善三个阶段,对其作出主要贡献的有巴罗、牛顿、莱布尼茨、柯西等人.</p> <p>案例二 微分和积分本身就是一对对立统一的矛盾体,它们是同一个问题的两个方面,而微积分基本定理的出现,使得微分和积分构成一个统一整体,让学生们体会微积分基本定理中蕴含的辩证统一思想,加深学生们对辩证唯物主义思想的理解.</p> <p>知识点</p> <p>一、变限积分与原函数的存在性</p> <p>1. 变限积分</p> <p>设 $f(x)$ 在 $[a, b]$ 上可积, 则对 $\forall x \in [a, b]$, $f(x)$ 在 $[a, x]$ 上也可积,</p>

于是, 由

$$\Phi(x) = \int_a^x f(t)dt, \quad x \in [a, b]$$

定义了一个以积分上限 x 为自变量的函数, 称为变上限的定积分. 类似地, 可定义变下限的定积分:

$$\Psi(x) = \int_x^b f(t)dt, \quad x \in [a, b]$$

$\Phi(x)$ 和 $\Psi(x)$ 统称为变限积分.

说明: 由于 $\int_x^b f(t)dt = -\int_b^x f(t)dt$, 因此, 只要讨论变上限积分即可.

定理 9.9 (面积函数的连续性) 若 $f(x)$ 在 $[a, b]$ 上可积, 则 $\Phi(x) = \int_a^x f(t)dt$ 在 $[a, b]$ 上连续.

证明思路: 表达面积函数 $\Phi(x) = \int_a^x f(t)dt$, 利用连续函数的定义及定积分的性质即可证得.

2. 微积分学基本定理

定理 9.10 (原函数存在定理) 若函数 $f(x)$ 在 $[a, b]$ 上连续, 则 $\Phi(x) = \int_a^x f(t)dt$ 在 $[a, b]$ 上处处可导, 且

$$\Phi'(x) = \frac{d}{dx} \int_a^x f(t)dt = f(x), \quad x \in [a, b].$$

即当 $f \in C[a, b]$ 时, 面积函数 $\Phi(x) = \int_a^x f(t)dt$ 可导且在点 $x \in [a, b]$ 的导数恰为被积函数在上限的值. 亦即 $\Phi(x)$ 是 $f(x)$ 的一个原函数.


证明: 利用导数的定义及定积分的性质即可得.

说明: 此定理沟通了导数与定积分之间的关系; 同时也证明了连续函数必有原函数这一结论, 并以积分的形式给出了 $f(x)$ 的一个原函数. 因此, 该定理也称之为微积分学基本定理, 且得用它可以给出牛顿-莱布尼茨公式的另一证明.

3. 积分第二中值定理

定理 9.11 (积分第二中值定理) 设函数 $f(x)$ 在 $[a, b]$ 上可积,

	<p>(i) 若函数 $g(x)$ 在 $[a, b]$ 上减, 且 $g(x) \geq 0$, 则存在 $\xi \in [a, b]$, 使得</p> $\int_a^b f(x)g(x)dx = g(a)\int_a^\xi f(x)dx .$ <p>(ii) 若函数在 $[a, b]$ 上增, 且 $g(x) \geq 0$, 则存在 $\eta \in [a, b]$, 使得</p> $\int_a^b f(x)g(x)dx = g(b)\int_\eta^b f(x)dx .$ <p>推论 函数 $f(x)$ 在上可积, 若 $g(x)$ 为单调函数, 则存在 $\xi \in [a, b]$, 使得</p> $\int_a^b f(x)g(x)dx = g(a)\int_a^\xi f(x)dx + g(b)\int_\eta^b f(x)dx .$ <p>注: 若函数 $g(x)$ 在 $[a, b]$ 上单调递减, 令 $h(x) = g(x) - g(b)$, 则对 $h(x)$ 应用定理 9.11 即得; 若函数 $g(x)$ 在 $[a, b]$ 上单调递增, $h(x) = g(x) - g(a)$, 则对 $h(x)$ 应用定理 9.11 即得.</p> <p>【思政元素】 1.不定积分和定积分是分别定义的, 微积分学基本定理将这两个看似不相干的概念联系起来, 并揭示了它们之间的内在联系, 使得学生学会普遍联系的观点. 2.让学生们体会微积分基本定理中所蕴含的“对立统一”的哲学思想, 可以延伸到事物的两面性, 结合党史、军史中的典型案例, 引导学生以发展的观点看问题, 正确对待人生道路上的挫折与困难, 失意时不气馁, 得意时不忘形, 脚踏实地, 奋勇前行.</p>
分析评价	<p>本案例通过学习微积分基本公式, 引导学生将定积分与原函数之间建立联系, 理解公式的证明过程, 体验数学推理的严谨性, 自觉建立转化、知识迁移, 引导学生领会微分学和积分学的辩证统一关系, 从而正确对待人生道路上的挫折与困难.</p>
评价者	<p>王晓 教授, 商洛学院数学与计算机应用学院</p>

案例编号	20031101-035	
案例标题	定积分的应用	
案例来源	原创	
内容简介	<p>首先通过播放谷爱凌冬奥首秀视频及首钢滑雪大跳台视频,介绍中国在 2022 冬奥会上取得的突破性的成就,并从首钢滑雪大跳台实现世界首次“一台两用”提出问题.其次将问题抽象成数学模型,引导学生发现解决问题的关键在于求出赛道转换结构结构的截面面积.再次逐层提出以 x 为积分变量和以 y 为积分变量的平面图形面积的求法.最后,引导学生思考如何解决课程一开始提出的问题,提高学生用数学知识解决问题的能力,并鼓励学生打下扎实的数学知识和专业知识基础,为我国科学技术的发展做出自己的贡献.</p>	
关键词	定积分的定义,微元法,几何应用	
编写时间	2023-4-21	
编著者	岳毅蒙,商洛学院	
素材形式	文字、图片等	
育人主题	培养学生的文化自信和家国情怀	
素材长度	1852	
案例正文	<p>案例一 以中国选手谷爱凌大跳台自由式滑雪决赛夺冠视频和首钢滑雪大跳台视频引入.简要介绍我国在冬奥会中取得的突破性的成就,并引导学生欣赏首钢滑雪大跳台优美、流畅的外形,了解其设计理念源自中国非常知名的世界文化遗产—敦煌壁画中“飞天”的元素,寓意为腾跃,飞翔.增强学生民族自豪感、弘扬中华文化的使命感,坚定文化自信.问题的提出:单板滑雪大跳台与自由式滑雪空中技巧赛道不同,但又相似,首钢滑雪大跳台实现世界首次“一台两用”,48小时内实现两个不同项目赛道的相互转换.基于此背景设计问题:为了使赛道曲面发生改变,设计者在大跳台一个长约36米、宽约14米、最大高差约3.5米的斜台区,用正四面体钢架搭“积木”,成功实现了单板滑雪大跳台与自由式滑雪空中技巧赛道的自由转换.</p> <p>问:(1)需要多少正四面体钢架(假设正四面体钢架体积为1米³)?(2)假设每个钢架成本大约为1500元,要实现这样的改造,总造价大约需要多少钱?</p> <p>上述提问的求解思路是:首先假设赛道转换结构的成本主要由钻</p>	

石形钢架决定，其它零部件成本可以忽略不计.然后，利用定积分求出赛道转换结构结构部分的截面面积，再乘以赛道宽度近似得到转换结构部分的体积，进而求出其造价.因而该问题包含了本节课的知识点：利用定积分求平面图形的面积.

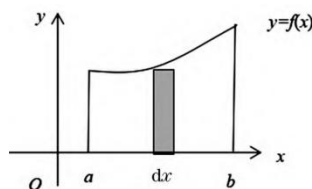
求出赛道转换结构结构截面面积即可解决引入部分的问题.此截面可看作曲边梯形，因此可顺理成章给出求曲边梯形面积的方法：微元法.

知识点

探究 1：如何用微元法求曲边梯形的面积？

通过分析，要求曲边梯形的面积，采用微元法，首先将曲边梯形进行分割，将每一个小的曲边梯形近似视为一个小矩形，将小矩形的面积作为一个面积微元，再通过叠加所有小矩形的面积，然后运用极限的思想，就可以得到整个曲边梯形的面积的近似值.

如图所示，求曲线 $y = f(x)(f(x) \geq 0)$ 及直线 $x = a, x = b$ 与 x 轴所围成的曲边梯形的面积.



采用微元法的求解步骤：

第一步：选变量，定区间：选择 x 为积分变量，小区间长度为 dx ；

第二步：取近似，写微元：在区间 $x \in [a, b]$ 内任意选择一个小区间，将曲边梯形近似看做一个小矩形，小矩形长 $f(x)$ ，宽 dx ，面积微元 $ds = f(x)dx$ ；

第三步：积微元，得面积：
$$S = \int_a^b f(x)dx.$$

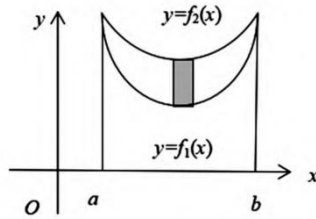
例 1 求由曲线 $xy = 1, x - y = 0, x = 2$ 围成的平面图形的面积.

例 2 求由抛物线 $y^2 = x$ 与直线 $x - 2y - 3 = 0$ 所围平面图形的面积.

探究 2: 若曲线 $f(x)$ 不都是非负时, 如何求曲边梯形的面积?

学生通过讨论利用微元法得到面积公式: $S = \int_a^b |f(x)| dx$.

探究 3: 求由上下两条连续曲线 $y = f_1(x), y = f_2(x)$ 及直线 $x = a, x = b$ 所围图形的面积?

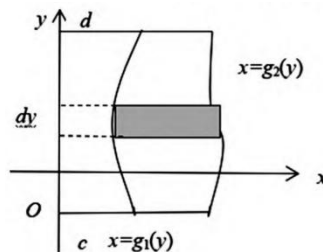


经讨论得到结论: 可以看作上下两个曲边梯形面积相减, 由此得到面积公式:

$$S = \int_a^b |f_2(x) - f_1(x)| dx$$

例 3 求 $y = x^2, x = y^2$ 所围的面积 S.

探究 4: 由左右两条连续曲线 $x = g_1(y), x = g_2(y)$ 及直线 $y = c, y = d$ 所围图形的面积?



经讨论得到结论: 可以看作左右两个曲边梯形面积相减, 由此得到面积公式:

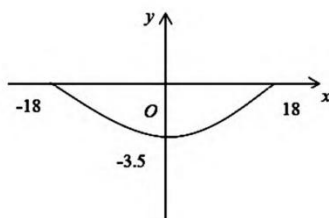
$$S = \int_c^d |g_2(y) - g_1(y)| dy$$

例 4 求抛物线 $y^2 = 2x$ 与直线 $x - y = 4$ 所围成的图形的面积.

回到引入提出的问题, 首钢滑雪大跳台实现赛道转换结构结构改造, 造价需要多少钱?

引导学生将赛道结构转换部分近似看作一个柱体, 求造价需要求出该柱体体积, 问题就转化为求赛道截面面积, 该面积可看作曲边梯形的面积.

教师引导学生建立平面直角坐标系，学生分组讨论如何选取 x 轴， y 轴，经讨论得出结论：剖面图中以直线部分为 x 轴，线段的垂直平分线为 y 轴建立坐标系. 下图为一组学生建立的平面直角坐标系（图中数据为近似值）



用熟悉的二次函数近似表示曲线， $y = 0.01x^2 - 3.5$ ，此外，还可以用正弦型曲线，圆的方程的一部分表示此曲线，可以留作课后思考.

$$\text{截面面积 } S = 2 \int_0^{18} |0.01x^2 - 3.5| dx = 84.3(m^2)$$

$$\text{斜面与曲面之间的体积 } V = 84.3 \times 14 = 1180.2(m^3)$$

$$\text{所需正四面体钢架个数为 } 1180.2 \div 1 \approx 1180 \text{ (个)}$$


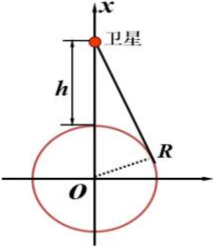
赛道转换结构结构造价大约为 177 万元，再加上忽略掉的其它成本，与网上公布的“完成搭建的全部造价约 200 万元”基本一致，而新建赛道需要超千万元的投资，大大节省了成本. 以此感受中国智慧，体会习近平总书记“绿色、共享、开放、廉洁”的办奥理念.

课后思考：在掌握了利用定积分求平面图形面积的方法后，解决了课上提出的首钢滑雪大跳台赛道转换结构的造价问题. 课后请学生继续收集和定积分求面积相关的实际案例，让学生进一步体会数学在实际生活中的应用.

【思政元素】1. 引导学生作出函数图像，板书展示计算过程，以直观的形式强化学生对知识的理解，体会微元法化整为零，积零为整，量变到质变的哲学思想. 微元法的思想是一项非常行之有效的分析问题和解决问题的办法，其核心就是将一个大问题分解成几个若干的小问题，进行各个击破. 这一方法可以应用于多个学科领域.

2. 通过自主探究过程，学生可以积极思考，主动参与，养成良好的自主探究的学习习惯，并利用现有的理论，得到更普遍的方法. 课

	<p>堂中学生经过了这样一个设疑、分析、猜想、解疑的探索过程，学生观察问题、分析问题、解决问题的能力、逻辑思维能力和概括能力得到有效地提高，进而真正地培养和提高学生们的数学素养.</p>
分析评价	<p>本案例以定积分求平面图形的面积为例，提出课程思政背景下的一种教学设计架构.讲述中国冬奥故事，传递中国声音，激发学生民族自豪感，将家国情怀厚植于学生心中.在知识传授的过程中，以问题意识引领学生，启发学生主动发现问题、提出问题、分析问题、解决问题，从而培养学生主动思考、积极探索的科学精神.注重知识的应用，在实践中实现课程思政，达到润物无声的育人效果.</p>
评价者	<p>王晓 教授，商洛学院数学与计算机应用学院</p>

案例编号	20031101-036
案例标题	无穷限的反常积分
案例来源	原创
内容简介	<p>无穷限反常积分可以理解为定积分的极限,在很多实际问题中都有广泛应用.学生在本节课之前已经掌握极限运算、定积分的概念和计算,但是同学们对数学课程偏向知识掌握,对极限法、定积分思想的理解和应用需进一步强化;学生有踏实的学风,但部分学生对课程存在畏难心理,缺乏主动思考.因此,在教学中我们要注重激发学生的学习兴趣,加强思想引领,注意揭示知识的内在联系,培养学生的分析和应用能力.</p>
关键词	反常积分; 无穷限反常积分
编写时间	2023-5-19
编著者	岳毅蒙, 商洛学院
素材形式	文字、图片等
育人主题	培养学生家国情怀和为建设科技强国努力.
素材长度	1042
案例正文	<p>案例一 首先播放一段央视新闻视频“嫦娥二号飞向日地拉格朗日 L2 点”,若时间允许,可再播放视频“嫦娥二号发射”,再由一张照片辅助介绍.嫦娥二号卫星从环绕月球轨道,飞往距地球 150 万公里的日地拉格朗日 L2 点进行深空探测,标志着我国在轨道设计、飞行控制、测控与通信、数据接收等方面的技术有了新的突破,也是中国第一次进行一次发射、执行多个任务、开展多个目标探测的一次全新尝试,实现了世界上首次由月球飞往遥远深空的星际飞行,对中国航天而言,这也是第一次前往如此遥远的宇宙深空,显示出中国深空探测迈向了新的旅程.</p>  <p>案例二 (第二宇宙速度问题)</p> <p>在地球表面垂直发射火箭,要使火箭克服地球引力无限远离地球,试问初速度 v_0 至少要多大?</p>  <p>第二宇宙速度问题归结为无穷积分问题,说明国家的航天事业需要我们这样具有专业知识的人才,激励学生们努力学好专业知识,练就为国家做贡献的过硬本领.通过简要介绍从毛主席提出要搞人造卫</p>

星到我国成为第五个独立发射人造卫星的国家这一段历史,培养学生的家国情怀.并借助我国宋代著名的理学家、哲学家和教育家朱熹的名言,引出成语“继往开来”,揭示这节课将要学习的无穷限的反常积分正是对这句话的完美写照.

知识点

一、两类反常积分的定义

定义 1 设函数 f 定义在无穷区间 $[a, +\infty)$ 上,且在任何有限区间 $[a, u]$ 上可积, 如果存在极限

$$\lim_{u \rightarrow +\infty} \int_a^u f(x) dx = J$$

则称此极限 J 为函数 f 在 $[a, +\infty)$ 上的无穷限反常积分 (简称无穷积分), 记作 $J = \int_a^{+\infty} f(x) dx$.

并称 $\int_a^{+\infty} f(x) dx$ 收敛. 如果极限不存在, 称发散.

类似地, 可定义 f 在区间 $(-\infty, b]$ 上的无穷积分:

$$\int_{-\infty}^b f(x) dx = \lim_{u \rightarrow -\infty} \int_u^b f(x) dx$$

对于 f 在 $(-\infty, +\infty)$ 上的无穷积分, 用前面两种无穷积分来定义:

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(x) dx = \int_{-\infty}^a f(x) dx + \int_a^{+\infty} f(x) dx$$

其中 a 为任一实数, 当且仅当等号右边两个无穷积分都收敛时, 它才是收敛的.

例 1 讨论无穷积分 $\int_1^{+\infty} \frac{1}{x^p} dx$ 的敛散性.


例 2 讨论下列无穷积分的敛散性.

$$(1) \int_2^{+\infty} \frac{1}{x(\ln x)^p} dx \quad (2) \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{1+x^2} dx$$

定义 2 设函数 f 定义在区间 $(a, b]$ 上, 在点 a 的任一右邻域上无界, 但在任何内闭区间 $[u, b] \subset (a, b]$ 上有界且可积. 如果存在极限

$$\lim_{u \rightarrow a^+} \int_u^b f(x) dx = J$$

	<p>则称此极限为无界函数 f 在 $(a, b]$ 上的反常积分，记作</p> $J = \int_a^b f(x)dx$ <p>并称反常积分 $\int_a^b f(x)dx$ 收敛，如果极限不存在，称为发散.</p> <p>例 3 计算瑕积分 $\int_0^1 \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} dx$ 的值.</p> <p>【思政元素】1. 通过观看卫星发射盛况，增强民族自豪感，激发学生科技报国的信念和决心通过卫星发射现场的图片，同学生交流观看发射直播的感受，体会我国航天事业不断突破，取得的巨大成就，增强民族自豪感.</p> <p>2. 通过第二宇宙速度问题的引入和解决，激发学生学习兴趣，培养学以致用、服务社会的意识和信心. 同时，提高学生数学建模与推导计算能力，以及用于创新、敢于探索的科学精神.</p> <p>3. 在反常积分概念得出的过程中，不断强化数形结合的思想和方法，体会借助极限法思想，实现有限到无限矛盾的转化，强化了学生的数学思维，提升专业人才培养质量.</p>
分析评价	<p>本案例既展示了数学理论的严密的逻辑思维，又体现了解决实际问题时的近似思想，还让我们领略到数学之美；既有分散知识点的复习巩固，又有综合利用多知识点解决复杂问题时的复合思维训练. 还让我们深入了解了我国航天科技的实力，认识科技强国的重要性和迫切性，增强民族自信心，发扬我国的航天精神，积极投身到建设繁荣富强的祖国和实现民族复兴的伟大事业中.</p>
评价者	王晓 教授，商洛学院数学与计算机应用学院

案例编号	20031101-037
案例标题	数项级数
案例来源	原创
内容简介	通过介绍《庄子·天下篇》，进而引入数项级数的定义，使学生懂得庄子已经认识到无限和有限的统一，培养学生的民族自豪感和文化自信；通过介绍数项级数的应用，培养学生树立辩证唯物主义世界观；通过学习定理（绝对收敛级数一定收敛），训练学生学习转变思维，找出解决问题的方法。
关键词	数项级数；级数的和；绝对收敛
编写时间	2023-2-12
编著者	孔亮 商洛学院
素材形式	文字、图片等
育人主题	培养正确人生观；透过现象洞察本质，求真创新的科学态度。
素材长度	1468
案例正文	<p>案例一 庄子（约公元前 369 年-约公元前 286 年），姓庄，名周，战国时期宋国蒙人。战国中期道家学派代表人物，思想家、哲学家、文学家，庄学的创立者，与老子并称“老庄”。最早提出的“内圣外王”思想对儒家影响深远。洞悉易理，指出“《易》以道阴阳”，其“三籁”思想与《易经》三才之道相合。其文想象力极为丰富，语言运用自如，灵活多变，能把微妙难言的哲理说得引人入胜。代表作品为《庄子》，其中名篇有《逍遥游》《齐物论》《养生主》等。其作品被称为“文学的哲学，哲学的文学”。据传庄子尝隐居南华山，卒葬南华山，故唐玄宗天宝初，被诏封为南华真人，其书《庄子》被奉为《南华真经》。</p>  <p>案例二 《庄子·天下篇》飞鸟之景未尝动也。镞矢之疾，而有不行、不止之时。狗非犬。黄马骊牛三。白狗黑。孤驹未尝有母。一尺之棰，日取其半，万世不竭。</p> $\frac{1}{2} + \frac{1}{2^2} + \cdots + \frac{1}{2^n} + \cdots$ <p>由此引入数项级数的定义：</p> <p>知识点</p>

给定一个数列 $\{u_n\}$ ，对它各项依次用“+”号连接起来的表达式

$$u_1 + u_2 + \cdots + u_n + \cdots$$

称为常数项无穷级数或数项级数（也常简称级数），其中 u_n 称为数

项级数的通项或一般项. 数项级数也常写作 $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$. 数项级数的前 n

项之和，记为

$$S_n = \sum_{k=1}^n u_k = u_1 + u_2 + \cdots + u_n.$$

若

$$\lim_{n \rightarrow \infty} S_n = S,$$

则称数项级数收敛，称 S 为数项级数的和，记作

$$S = u_1 + u_2 + \cdots + u_n + \cdots = \sum_{n=1}^{\infty} u_n.$$

3. 绝对收敛级数一定收敛.

正项级数的敛散性的判别方法灵活多样，通过上面结论可将一般级数的敛散性转化为正项级数的敛散性.

4. 调和级数

$$1 + \frac{1}{2} + \cdots + \frac{1}{n} + \cdots$$

是发散的.

案例三 级数是一个非常重要的数学概念，它在多个领域都有广泛的应用：

金融与经济学：级数被广泛应用于金融领域的计算，如复利计算、债券利息的计算等. 这些都需要将不同时间点上的数值进行累加，以得到最终的总量. 此外，在经济学中，波动理论和需求理论的预测也会涉及到级数的应用，如对一组波动的振幅求和以得到总的波形.

物理学：级数在物理学中也扮演着关键角色. 例如，在波动理论中，需要对一系列波的振幅进行求和，以得到最终的波形；在电磁学中，级数则用于分析和处理复杂的电场和磁场问题.

工程技术和计算机科学：在工程设计和计算机编程中，级数常常用于处理不同参数的数据集，以达到优化算法的目的，提高计算效率. 此外，级数还用于优化算法的时间复杂度和降低计算成本.

统计学和生物学：在统计学中，级数用于对样本数据进行求和，以得到总体数据的估计值；而在生物学中，级数则用于对分子结构的组成部分进行求和，以获得分子的能量和属性.

数学本身：级数作为研究函数的重要工具之一，能够表示许多常用的非初等函数，包括微分方程的解. 此外，级数还能通过幂级数等方式研究非初等函数，并进行近似计算.

教育：在中学数学教学中，级数被用作快速计算数字之和的方法，如定积分、测量圆周等. 同时，级数也能帮助学生理解和分析数列的特征，进一步推导数学定理.

综上所述，级数不仅在数学领域内具有广泛的应用，而且在其他科学技术领域中也发挥着重要作用.

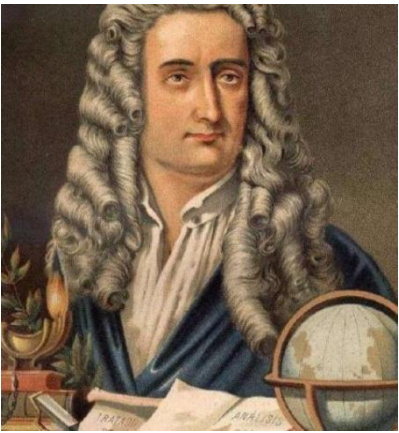
【思政元素】1. 庄子已经认识到无限和有限的统一，培养学生的民族自豪感和文化自信. 激励学生自觉将个人理想的追求与国家的发展，民族的复兴结合在一起.

2. 通过介绍级数的应用，使学生能够认识到数学来源于实践，形成理论后又服务于实践，激发学生学习兴趣，培养学生树立辩证唯物主义世界观.

3. 训练学生学习转变思维, 找出解决问题的方法和良好的数学素养. 人生总会遇到困难，山不转水转，水不转人转. 一旦会转动，变通，所有事情都可以转变. 要改变头脑，转换思路：感到不顺，受挫，并不是糟糕的事情，只是一种信号，告诉我们应该变通了.

4. 尽管调和级数的一般项越来越小，而且无限逼近于零，但是和却为无穷大，所以说调和级数把无限累积的力量体现地淋漓

	<p>尽致，点点滴滴可以汇聚成河。“勿以恶小而为之，勿以善小而不为”，要铭记“养小德才能成大德”。</p>
分析评价	<p>本案例通过介绍《庄子·天下篇》中的“一尺之棰，日取其半，万世不竭”，引入数项级数的定义，培养学生的自豪感和文化自信；通过介绍数项级数的学习和应用，培养学生树立辩证唯物主义世界观，训练学生学习转变思维。</p>
评价者	<p>王晓 教授，商洛学院数学与计算机应用学院</p>

案例编号	20031101-038
案例标题	函数展开成幂级数
案例来源	改编
内容简介	通过介绍数学家泰勒和劳林级数，激发学生的学习兴趣；通过学习间接展开法，鼓励学生多思考，最终会有所突破.
关键词	泰勒级数，麦克劳林级数，间接展开法
编写时间	2023-4-5
编著者	孔亮，商洛学院
素材形式	文字、图片等
育人主题	培养学生善于思考的习惯.
素材长度	1259
案例正文	<p>案例一 数学家泰勒的故事.布鲁克·泰勒（Brook Taylor 1685 年 8 月 18 日—1731 年 11 月 30 日）英国著名数学家，有限差分理论的奠基者，主要以泰勒公式和泰勒级数出名，同时还是一位富有才华的音乐家和画家.虽然泰勒是一名非常杰出的数学家，但是泰勒的写作风格过于简洁，不喜欢明确和完整地把他的思路写下来，因此他的许多证明没有遗留下来，这也是他的许多创见未能获得更高声誉的一个原因.</p>  <p>知识点</p> <p>一、 泰勒级数</p> <p>前面讨论了幂级数的收敛域及其和函数的性质.但在许多应用中，遇到的却是相反的问题：给定函数 $f(x)$，要考虑它是否能在某个区间内“展开成幂级数”，也就是说，是否能找到这样一个幂级数，它在某区间内收敛，且其和恰好就是给定的函数 $f(x)$.如果能找到这样的幂级数，则称函数在该区间内能展开成幂级数，而这个幂级数在该区间内就表达函数 $f(x)$.</p> <p>1、泰勒公式</p>

如果 $f(x)$ 在点 x_0 的某邻域内有直到 $n+1$ 的导数. 则对此邻域内任一 x 有

$$f(x) = f(x_0) + \frac{f'(x_0)}{1!}(x-x_0) + \frac{f''(x_0)}{2!}(x-x_0)^2 + \dots + \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x-x_0)^n + \frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!}(x-x_0)^{n+1},$$

(其中 ξ 在 x 与 x_0 之间), 上式称为 $f(x)$ 的 n 阶泰勒展开式或泰勒公式, 利用泰勒公式, 我们可以用一个关于 $(x-x_0)$ 的 n 次多项式.

$$p_n(x) = f(x_0) + \frac{f'(x_0)}{1!}(x-x_0) + \frac{f''(x_0)}{2!}(x-x_0)^2 + \dots + \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x-x_0)^n$$

(也称为泰勒多项式) 来近似的表达函数 $f(x)$, 并可通过余项

$$R_n(x) = f(x) - p_n(x) = \frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!}(x-x_0)^{n+1}$$

估计误差. 在泰勒公式中, 当 $x_0 = 0$ 时, 记 $\xi = \theta x$, $0 < \theta < 1$, 此时公式成为

$$f(x) = f(0) + \frac{f'(0)}{1!}x + \frac{f''(0)}{2!}x^2 + \dots + \frac{f^{(n)}(0)}{n!}x^n + \frac{f^{(n+1)}(\theta x)}{(n+1)!}x^{n+1}$$

称为 $f(x)$ 的麦克劳林公式, 或称为按 x 的幂展开的泰勒公式.

2、泰勒级数

如果 $f(x)$ 在点 x_0 的某邻域内具有各阶导数

$$f'(x), f''(x), \dots, f^{(n)}(x), \dots,$$

称级数

$$f(x_0) + f'(x_0)(x-x_0) + \frac{f''(x_0)}{2!}(x-x_0)^2 + \dots + \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x-x_0)^n + \dots$$

为 $f(x)$ 在 $x = x_0$ 的泰勒级数. 特别当 $x_0 = 0$ 时, 则称它为 $f(x)$ 的麦克劳林级数. 即

$$f(0) + f'(0)x + \frac{f''(0)}{2!}x^2 + \dots + \frac{f^{(n)}(0)}{n!}x^n + \dots$$

案例正文	<p>案例二 麦克劳林 (Maclaurin, 1698-1746) 是苏格兰数学家. 麦克劳林是一位牧师的儿子, 半岁丧父, 9 岁丧母. 由其叔父抚养成人. 叔父也是一位牧师. 1719 年, 麦克劳林在访问伦敦时见到了牛顿, 从此便成为牛顿的门生. 1724 年, 他继续获得教授席位. 麦克劳林 21 岁时发表了第一本重要著作《构造几何》, 在这本书中描述了作圆锥曲线的一些新的巧妙方法, 精辟地讨论了圆锥曲线及高次平面曲线的种种性质. 1742 年撰写的《流数论》以泰勒级数作为基本工具, 是对牛顿的流数法作出符合逻辑的、系统解释的第一本书. 他以熟练几何方法和穷竭法论证了流数学说, 还把级数作为求积分的方法, 并独立于 Cauchy 以几何形式给出了无穷级数收敛的积分判别法. 他得到数学分析中著名的 Maclaurin 级数展开式, 并用待定系数法给予证明.</p> <p>定理 设函数 $f(x)$ 在点 x_0 的某一邻域内具有各阶导数, 则 $f(x)$ 在该邻域内能展开成泰勒级数的充要条件是 $f(x)$ 的泰勒公式中的余项 $R_n(x)$ 当 $n \rightarrow \infty$ 时的极限为零. 即</p> $\lim_{n \rightarrow \infty} R_n(x) = 0.$ <p>称为函数 $f(x)$ 可展开成麦克劳林级数.</p> <p>显然, 将函数 $f(x)$ 在 $x = x_0$ 处展开成泰勒级数, 可通过变量替换 $t = x - x_0$, 化归为函数</p> $f(x) = f(t + x_0) = F(t)$ <p>在 $t = 0$ 处的麦克劳林展开. 因此, 我们将着重讨论函数的麦克劳林展开.</p> <p>特别地, 当 $x_0 = 0$ 时</p> $f(x) = f(0) + \frac{f'(0)}{1!}x + \frac{f''(0)}{2!}x^2 + \dots + \frac{f^{(n)}(0)}{n!}x^n + \dots$ <p>称为函数 $f(x)$ 可展开成麦克劳林级数.</p> <p>显然, 将函数 $f(x)$ 在 $x = x_0$ 处展开成泰勒级数, 可通过变量</p>
------	--

案例正文

(3) 求出幂级数

$$f(x_0) + f'(x_0)(x-x_0) + \frac{f''(x_0)}{2!}(x-x_0)^2 + \dots + \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x-x_0)^n + \dots$$

(4) 考察余项 $R_n(x)$ 的极限, 并给出收敛域.

这种直接方法计算量较大, 而且最后要考察余项 R_n 是否收敛于零, 这是一件很不容易的事情.

例 1 将函数 $f(x)=e^x$ 展开成 x 的幂级数.

2 间接展开法

以上两个例子是用直接方法(直接按公式 $a_n = \frac{f^{(n)}(0)}{n!}$ 计算幂

级数的系数)展开成幂级数的, 下面, 我们利用幂级数本身的性质, 如四则运算, 逐项微分, 逐项积分等, 把函数 $f(x)$ 展开成为 x 的幂级数, 这样计算简单, 而且往往可以避免直接研究余项, 根据函数展开的唯一性, 可知这与直接方法所得的结果一样.

例 2 已知函数 $f(x) = \sin x$ 展开成 x 的幂级数

$$\sin x = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \dots + (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!} + \dots \quad (-\infty < x < +\infty)$$

把函数 $f(x)=\cos x$ 展开成 x 的幂级数


$$\cos x = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \dots + (-1)^n \frac{x^{2n}}{(2n)!} + \dots \quad (-\infty < x < +\infty)$$

【思政元素】 1. 通过介绍数学家泰勒和麦克劳林, 引导学生学习泰勒和麦克劳林的创新精神.

2. 通过直接展开法, 培养学生脚踏实地的习惯.

3. 通过间接展开法, 引导学生体会转换解题的思路, 使问题解决更便捷, 但间接展开法的使用也离不开直接展开法做好的铺垫. 因此, 一个人的成功离不开前人的指引和启迪, 科学上的进步更是要靠一代一代人前赴后继不断努力的结果.

分析评价	本案例通过讲解泰勒级数和麦克劳林级数，引导学生学习数学家泰勒和麦克劳林的创新精神；通过学习间接展开法，鼓励学生学习转换思想，在已有基础上继续努力，不断突破.
评价者	王晓 教授，商洛学院数学与计算机应用学院

案例编号	20031101-039
案例标题	傅里叶级数
案例来源	原创
内容简介	通过介绍傅里叶的经历，引导学生正确对待人生发展中的顺境与逆境，培养学生健康向上的人生态度；通过介绍傅里叶级数的应用，培养学生树立辩证唯物主义世界观；通过计算函数的傅里叶级数展开式，培养学生踏实认真的学习习惯和良好的数学素养.
关键词	傅里叶级数；傅里叶系数；三角函数系
编写时间	2023-2-10
编著者	孔亮 商洛学院
素材形式	文字、图片等
育人主题	培养正确人生观；透过现象洞察本质，求真创新的科学态度.
素材长度	1718
案例正文	<p>案例一 1. 傅里叶(Fourier, Jean Baptiste Joseph)1768年3月21日生于法国奥塞尔；1830年5月16日卒于巴黎。傅里叶出身平民，父亲是位裁缝。9岁时双亲亡故，以后由教会送入镇上的军校就读，表现出对数学的特殊爱好。他还有志于参加炮兵或工程兵，但因家庭地位低贫而遭到拒绝。后来希望到巴黎在更优越的环境下追求他有兴趣的研究。可是法国大革命中断了他的计划，于1789年回到家乡奥塞尔的母校执教。在大革命期间，傅里叶以热心地方事务而知名，并因替当时恐怖行为的受害者申辩而被捕入狱。出狱后，他曾就读于巴黎师范学校，虽为期甚短，其数学才华却给人以深刻印象。1795年，当巴黎综合工科学学校成立时，即被任命为助教，协助 J. L. 拉格朗日(Lagrange)和 G. 蒙日(Monge)从事数学教学。这一年他还讽刺性地被当作罗伯斯庇尔(Robespierre)的支持者而被捕，经同事营救获释。1808年，蒙日选派他跟随拿破仑(Napoleon)远征埃及。在开罗，他担任埃及研究院的秘书，并从事许多外交活动，但同时他仍不断地进行个人的业余研究，即数学物理方面的研究。1801年回到法国后，傅里叶希望继续执教于巴黎综合工科学学校，但因拿破仑赏识他的行政才能，任命他为伊泽尔地区首</p> 

府格勒诺布尔的高级官员。由于政声卓著，1808年拿破仑又授予他男爵称号。此后几经宦海浮沉，1815年，傅里叶终于在拿破仑百日王朝的尾期辞去爵位和官职，毅然返回巴黎以图全力投入学术研究。但是，失业、贫困以及政治名声的落潮，这时的傅里叶处于一生中最艰难的时期。由于得到昔日同事和学生的关怀，为他谋得统计局主管之职，工作不繁重，所入足以为生，使他得以继续从事研究。1816年，傅里叶被提名为法国科学院的成员。初时因怒其与拿破仑的关系而为路易十八所拒。后来，事情澄清，于1817年就职科学院，其声誉又随之迅速上升。他的任职得到了当时年事已高的拉普拉斯(Laplace)的支持，却不断受到泊松(Poisson)的反对。1822年，他被选为科学院的终身秘书，这是极有权力的职位。1827年，他又被选为法兰西学院院士，还被英国皇家学会选为外国会员。傅里叶一生为人正直，他曾对许多年轻的数学家和科学家给予无私的支持和真挚的鼓励，从而得到他们的忠诚爱戴，并成为他们的至交好友。在他帮助过的科学家中，有知名的奥斯特(Oersted)、狄利克雷(Dirichlet)、阿贝尔(Abel)和斯图姆(Sturm)等人。有一件令人遗憾的事，就是傅里叶收到伽罗瓦(Galois)的关于群论的论文时，他已病情严重而未阅，以致论文手稿失去下落。

傅里叶去世后，在他的家乡为他树立了一座青铜塑像。20世纪以后，还以他的名字命名了一所学校，以示人们对他的尊敬和纪念。

知识点

若 f 是以 2π 为周期且在 $[-\pi, \pi]$ 上可积的函数，令

$$a_n = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \cos nxdx, n = 0, 1, 2, \dots,$$

$$b_n = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \sin nxdx, n = 1, 2, \dots.$$

称为 f (关于三角函数系) 的傅里叶系数，以 f 的傅里叶系数为

系数的三角级数

$$\frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n \cos nx + b_n \sin nx)$$

称为 f （关于三角函数系）的傅里叶级数，记作

$$f(x) \sim \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n \cos nx + b_n \sin nx).$$

【思政元素】 正确对待人生发展中的顺境与逆境，处理好人生发展中的各种矛盾，培养健康向上的人生态度。

案例二 傅里叶级数在多个领域都有广泛的应用，以下是几个主要的应用场景：

（1）信号处理：傅里叶级数被用来将时域信号转换为频域信号，以了解信号的不同频率分量及其强度和相位信息。这有助于进行滤波、降噪、压缩等操作。在数字信号处理中，傅里叶级数也用于分解信号，使其成为一系列正弦和余弦函数的叠加，便于进一步的分析和治疗。

（2）图像处理：傅里叶级数帮助将图像分解为正弦和余弦函数的组合，这样可以在不改变主要特征的情况下压缩图像的高频分量，节省存储空间。此外，它也可以用于图像增强和边缘检测等操作。

（3）物理学：在物理学中，傅里叶级数用于描述波动和振动现象，以及分析周期性物理量的特性。它可以将变化的电流和电压表示为一组正弦和余弦波，方便分析。同时，它也适用于声学 and 光学领域，用于描述和处理复杂的波动模式。

（4）数学：傅里叶级数不仅用于表示周期函数，还可以用于求解偏微分方程等数学问题。通过将问题转化为求解一组傅里叶级数系数的问题，可以得到问题的解析解。

傅里叶级数在信号处理、图像处理、物理学和工程学等多个领域都发挥了重要作用，提供了从时域到频域的有效转换手段，以及在分析和处理周期性信号时的关键工具。

	<p>【思政元素】 通过介绍傅里叶级数的应用，使学生能够认识到数学来源于实践，形成理论后又服务于实践，培养学生树立辩证唯物主义世界观.</p> <p>例 设</p> $f(x) = \begin{cases} x, & 0 \leq x \leq \pi, \\ 0, & -\pi < x < 0, \end{cases}$ <p>求 f 的傅里叶级数展开式.</p> <p>【思政元素】 通过计算函数的傅里叶级数展开式，培养学生踏实认真的学习习惯和良好的数学素养.</p>
分析评价	<p>本案例通过介绍傅里叶的人生经历和傅里叶级数的应用，引导学生正确对待人生发展中的顺境与逆境，培养学生健康向上的人生态度，引导学生树立辩证唯物主义世界观；通过计算函数的傅里叶级数展开式，培养学生踏实认真的学习习惯和良好的数学素养.</p>
评价者	王晓 教授 商洛学院数学与计算机应用学院

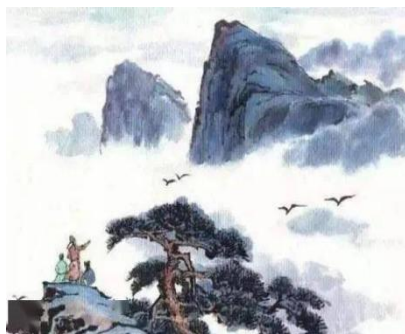
案例编号	20031101-040
案例标题	方向导数与梯度
案例来源	改编
内容简介	通过《望庐山瀑布》和蚂蚁逃生问题讨论，引入方向导数和梯度，学会从不同的角度分析问题.
关键词	方向导数；梯度
编写时间	2022-3-1
编著者	孔亮，商洛学院
素材形式	文字等
育人主题	对学生进行科学思维方法的训练，提高学生分析问题的能力.
素材长度	1565
案例正文	<p>案例一 《望庐山瀑布》</p> <p>日照香炉生紫烟, 遥看瀑布挂前川. 飞流直下三千尺, 疑是银河落九天.</p> <p>案例二 引入问题（蚂蚁逃生问题）： 假设一个金属板下面有一团火焰，它使金属板受热，假定金属板的温度分布函数 $T(x, y) = \frac{1}{\sqrt{x^2+y^2}}$，其中 (x, y) 为金属板上点坐标值，在金属板某一处有一只蚂蚁，问这只蚂蚁应沿什么方向爬行才能最快到达较凉快的地方？该问题实质上讨论的是函数 $f(x, y)$ 在某一点 P 沿某一方向的变化率.</p> <p>知识点 函数的增量 $f(x + \Delta x, y + \Delta y) - f(x, y)$ 与 PP' 两点间的距离 $\rho = \sqrt{(\Delta x)^2 + (\Delta y)^2}$ 之比值，当 P' 沿着 l 趋于 P 时，如果此式的极限存在，则称这极限为函数在点 P 沿方向 l 的方向导数. 记为</p> $\frac{\partial y}{\partial x} = \lim_{\rho \rightarrow 0} \frac{f(x+\Delta x, y+\Delta y) - f(x, y)}{\rho}.$ <p>依定义，函数 $f(x, y)$ 在点 P 沿着 x 轴正方向 $\vec{e}_1 = \{1, 0\}$、y 轴正向 $\vec{e}_2 = \{0, 1\}$ 的方向导数分别为 f_x、f_y；沿着 x 负向、y 轴负向的方向导数是 $-f_x$、$-f_y$.</p> <p>定理 1 如果函数 $z = f(x, y)$ 在点 $P(x_0, y_0)$ 是可微分的，那么函数在该点沿任意方向 l 的方向导数都存在，且有</p>



$$\frac{\partial f}{\partial l} = \frac{\partial f}{\partial x} \cos \alpha + \frac{\partial f}{\partial y} \cos \beta,$$

其中 $\vec{e}_l = (\cos \alpha, \cos \beta)$.

【思政元素】 对于二元函数，某一点沿着不同方向，它的方向导数往往不相同，正像苏轼在《题西林壁》所说：“横看成岭侧成峰，远近高低各不同。不识庐山真面目，只缘身在此山中。” 从不同角度看庐山，坡度不同。



例 1 求函数 $f(x, y) = xy$ 在点 $(1, 1)$ 沿方向 $\vec{e}_l = (\cos \varphi, \sin \varphi)$ 的方向导数，并问在怎样的方向上此方向导数有

(1) 最大值； (2) 最小值； (3) 等于 0? (φ 为 x 轴正向到射线的转角)

【思政元素】 培养学生计算能力、分析问题、解决问题的能力 and 逻辑思维能力.

知识点

定义 1 设函数 $z = f(x, y)$ 在平面区域内 D 内具有一阶连续偏导数，则对于每一点 $P = (x, y) \in D$ ，都可定出一个向量 $\frac{\partial f}{\partial x} \vec{i} + \frac{\partial f}{\partial y} \vec{j}$ ，该向量称为函数 $z = f(x, y)$ 在点 $P(x, y)$ 的梯度，记为

$$\text{grad } f(x, y) = \frac{\partial f}{\partial x} \vec{i} + \frac{\partial f}{\partial y} \vec{j}$$


设 $\vec{e} = \cos \alpha \vec{i} + \cos \beta \vec{j}$ 是方向 \vec{l} 上的单位向量，由方向导数公式知

$$\begin{aligned} \frac{\partial f}{\partial l} &= \frac{\partial f}{\partial x} \cos \alpha + \frac{\partial f}{\partial y} \cos \beta = \left\{ \frac{\partial f}{\partial x}, \frac{\partial f}{\partial y} \right\} \cdot \{ \cos \alpha, \cos \beta \} \\ &= \text{grad } f(x, y) \cdot \vec{e} \\ &= |\text{grad } f(x, y)| \cos \theta \end{aligned}$$

其中 $\theta = [\text{grad } f(x, y) \cdot \vec{e}]$ ，当 $\cos[\text{grad } f(x, y) \cdot \vec{e}] = 1$ 时， $\frac{\partial f}{\partial l}$ 有最大值.

结论： 函数在某一点的梯度是这样一个向量，它的方向与取得

	<p>最大方向导数的方向一致，而它的模为方向导数的最大值，梯度的模为</p> $ \text{grad } f(x, y) = \sqrt{\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)^2}$ <p>【思政元素】 由梯度定义可知，蚂蚁逃生问题的答案是蚂蚁应沿温度函数$T(x, y)$在蚂蚁初始位置处梯度的反方向（即又热变冷变化最剧烈的方向）爬行，就能最快到达较凉快的地方. 利用蚂蚁逃生问题的方法论启示，对学生进行人生观和科学伦理教育. 人们常说：成功的道路没有捷径可以走！但是掌握科学的方法，却能帮你提高效率. 通过蚂蚁逃生问题讨论，对学生进行科学思维方法的训练和科学伦理的教育.</p>
分析评价	<p>通过《望庐山瀑布》和蚂蚁逃生问题讨论，引入方向导数和梯度，强加了对学生进行科学思维方法的训练，引导学生学会从不同的角度分析问题.</p>
评价者	<p>王晓 教授 商洛学院数学与计算机应用学院</p>

案例编号	20031101-041
案例标题	多元函数的极值
案例来源	原创
内容简介	通过讲解多元函数的极值,让学会用运动的观点看待问题,从全局出发给出准确判断.引导学生从联系的观点学习数学分析,锻炼学生探究不同概念、定理的内在联系,并且分析和处理现实生活中遇到的问题.
关键词	多元函数;极值;平面图形的面积
编写时间	2023-2-20
编著者	孔亮 商洛学院
素材形式	文字、图片等
育人主题	采用运动的观点看待问题,从全局出发给出准确判断,培养分析和处理现实生活中问题的能力.
素材长度	1243
案例正文	<p>案例一 题西林壁</p> <p>横看成岭侧成峰,远近高低各不同. 不识庐山真面目,只缘身在此山中.</p> <p>通过宋代文学家苏轼的《题西林壁》引入多元函数极值的定义.《题西林壁》是宋代文学家苏轼的诗作.这是一首诗中有画的写景诗,又是一首哲理诗,哲理蕴含在对庐山景色的描绘之中.前两句描述了庐山不同的形态变化.庐山横看绵延逶迤,崇山峻岭郁郁葱葱连环不绝;侧看则峰峦起伏,奇峰突起,耸入云端.从远处和近处不同的方位看庐山,所看到的山色和气势又不相同.后两句写出了作者深思后的感悟:之所以从不同的方位看庐山,会有不同的印象,原来是因为“身在此山中”.也就是说,只有远离庐山,跳出庐山的遮蔽,才能全面把握庐山的真正仪态.全诗紧紧扣住游山谈出自己独特的感受,借助庐山的形象,用通俗的语言深入浅出地表达哲理,故而亲切自然,耐人寻味.通过《题西林壁》这首诗引入极值的概</p> 

念，会给抽象的数学课堂注入一缕诗情画意. 这首诗描绘的是庐山随着观察者角度不同，呈现出不同的样貌. 多元函数的极值这个知识点，数形结合后画出来的图形，就像庐山的山岭一样连绵起伏，极大值在山顶取得，极小值则是出现在山谷.

知识点

设 f 在点 $P_0(x_0, y_0)$ 的某领域 $U(P_0)$ 上有定义. 若对任何点 $P(x, y) \in U(P_0)$ ，成立不等式

$$f(P) \leq f(P_0) \text{ (或 } f(P) \geq f(P_0)\text{)},$$

则称 f 在点 P_0 取得极大 (或极小) 值，点 P_0 称为 f 的极大 (或极小) 值点. 极大值、极小值统称为极值. 极大值点、极小值点统称为极值点.

【思政元素】 1. 人生就像连绵不断的曲面，起起落落是必经之路，是成长的需要，跌入低谷不气馁，甘于平淡不放任，伫立高峰不张扬，这才叫宽阔胸襟. 要学会用运动的观点看待问题，低谷与顶峰只是人生路上的一个转折点. 2. 要认识事物的真相与全貌，必须超越狭小的范围，把握全局才能得到准确判断.

知识点


设二元函数 f 具有二阶连续偏导数，并记

$$H_f(P_0) = \begin{pmatrix} f_{xx}(P_0) & f_{xy}(P_0) \\ f_{yx}(P_0) & f_{yy}(P_0) \end{pmatrix}$$

为 f 在 P_0 的黑塞矩阵.

设二元函数 f 在点 $P_0(x_0, y_0)$ 的某领域 $U(P_0)$ 上具有二阶连续偏导数，且 P_0 是 f 的稳定点. 则当 $H_f(P_0)$ 是正定矩阵时， f 在 P_0 点取得极小值；当 $H_f(P_0)$ 是负定矩阵时， f 在 P_0 点取得极大值；当

	<p>$H_f(P_0)$是不定矩阵时, f在P_0点不取极值.</p> <p>【思政元素】 通过多元函数极值充分条件的讲解, 将数学分析中的知识和高等代数中的知识联系起来, 激发了学生学习数学分析的兴趣. 通过极值充分条件的证明, 将高等代数的技巧应用到数学分析中, 培养了学生的数学素质. 唯物论的根本原理是“世界物质统一性原理”. 既然世界上的万事万物具有统一性、共性, 那么由此就必然得出万物是相互联系的看法. 因为万物有统一性, 所以万物相互联系. 万物的相互联系是万物统一性的表现. 而联系包括事物间的相互作用, 由相互作用构成事物的运动. 联系是事物本身所固有的, 是不依人的意志为转移的. 因为联系和事物的存在直接相关. 事物存在着就说它联系着, 无联系了也就不存在了, 联系和存在同在, 所以联系是客观事物固有的. 联系有直接联系和间接联系、内部联系和外部联系、本质联系和非本质联系、必然联系和偶然联系等等. 通过极值充分条件的讲解, 使同学们明白数学的不同课程不是孤立存在, 而是相互联系的, 引导学生从联系的观点学习数学分析, 锻炼学生探究不同概念、定理的内在联系, 并且分析和处理现实生活中遇到的问题.</p>
分析评价	<p>本案例通过讲解多元函数的极值, 让学会用运动的和全局的观点看待和分析问题. 引导学生从联系的观点学习数学分析, 锻炼学生探究不同概念、定理的内在联系, 并且分析和处理现实生活中遇到的问题.</p>
评价者	<p>王晓 教授 商洛学院数学与计算机应用学院</p>

案例编号	20031101-042
案例标题	拉格朗日乘法
案例来源	原创
内容简介	本案例通过以数学家拉格朗日命名的科学术语展示及无条件极值例题的先导,展开条件极值问题的探究,由简到难,由浅入深,层层递进,条分缕析向学生展示条件极值问题的解答方法.
关键词	拉格朗日乘法
编写时间	2024-5-25
编著者	王瑞 商洛学院
素材形式	文字、图片等
育人主题	借助数学史进行数学教育,可以达到培养学生数学素养,锻造向优秀数学家学习的美好品质,和启迪人生的作用.
素材长度	915
案例正文	<p>案例一 约瑟夫·拉格朗日 (Joseph-Louis Lagrange, 1736 年—1813 年) 全名为约瑟夫·路易斯·拉格朗日, 法国著名数学家、物理学家。1736 年 1 月 25 日生于意大利都灵, 1813 年 4 月 10 日卒于巴黎。他在数学、力学和天文学三个学科领域中都有历史性的贡献, 其中尤以数学方面的成就最为突出. 以数学家拉格朗日命名的科学术语.</p>  <p>知识点 条件极值、拉格朗日乘法</p> <p>对于函数的自变量, 除了限制在函数的定义域内以外, 并无其它条件, 所以有时候称为无条件极值. 但在实际问题中, 有些极值问题除了限制在定义域内, 还需要满足一定的附加条件, 这样的极值称为条件极值. 例如, 求表面积为 a^2 而体积为最大的长方体的体积问题. 设长方体的三棱的长为 x, y, z, 则体积 $V = xyz$. 又因假定表面积为 a^2, 所以自变量 x, y, z 还必须满足附加条件</p> $2(xy + yz + xz) = a^2.$ <p>但在很多情形下, 将条件极值化为无条件极值并不这么简单. 有一种直接寻求条件极值的方法, 可以不必先把问题化到无条件极</p>

值的问题，这就是下面要介绍的拉格朗日乘数法。

现在我们来寻求函数 $z = f(x, y)$ 在满足条件 $\varphi(x, y) = 0$ 下取得极值的必要条件。

拉格朗日乘数法 要求函数 $z = f(x, y)$ 在附加条件 $\varphi(x, y) = 0$ 下的极值，可先构造辅助函数

$$F(x, y) = f(x, y) + \lambda\varphi(x, y)$$

其中 λ 为某一常数，求其对 x 与 y 的一阶偏导数，并使之为零，然后与条件 $\varphi(x, y) = 0$ 联立

$$\begin{cases} f_x(x, y) + \lambda\varphi_x(x, y) = 0, \\ f_y(x, y) + \lambda\varphi_y(x, y) = 0, \\ \varphi(x, y) = 0. \end{cases}$$

由这方程组解出 x ， y 及 λ ，则其中 x ， y 就是函数 $f(x, y)$ 在附加条件下 $\varphi(x, y) = 0$ 的可能极值点的坐标。

最后，根据问题的具体意义判定所求得的点是否为极值点。

这方法还可以推广到自变量多于两个而条件多于一个的情形。例如，要求函数 $u = f(x, y, z, t)$ 在附加条件 $\varphi(x, y, z, t) = 0$ 及 $\psi(x, y, z, t) = 0$ 下的极值，可以先构成辅助函数

$$F(x, y, z, t) = f(x, y, z, t) + \lambda_1\varphi(x, y, z, t) + \lambda_2\psi(x, y, z, t)$$

其中 λ_1 ， λ_2 均为常数，求其一阶偏导数，并使之为零，然后与 (9) 中的两个方程联立起来求解，这样得出的 x 、 y 、 z 、 t 就是函数 $f(x, y, z, t)$ 在附加条件 (9) 下的可能极值点的坐标。

至于如何确定所求得的点是否极值点，在实际问题中往往可根据问题本身的性质来判定。

例 1. 求表面积为 a^2 而体积为最大的长方体的体积。

	<p>【思政元素】在数学最优问题中，拉格朗日乘数法（以数学家约瑟夫·路易斯·拉格朗日命名）是一种寻找变量受一个或多个条件所限制的多元函数的极值的方法. 这种方法将一个有 n 个变量与 k 个约束条件的最优化问题转换为一个有 $n + k$ 个变量的方程组的极值问题，其变量不受任何约束.</p> <p>通过以数学家拉格朗日命名的科学术语展示及无条件极值例题的先导，展开条件极值问题的探究，由简到难，由浅入深，层层递进，条分缕析向学生展示条件极值问题的解答方法.</p>
分析评价	<p>本案例通过以数学家拉格朗日命名的科学术语展示及无条件极值例题的先导，展开条件极值问题的探究，由简到难，由浅入深，层层递进，条分缕析向学生展示条件极值问题的解答方法. 借助数学史进行数学教育，可以达到培养学生数学素养，锻造向优秀数学家学习的美好品质，和启迪人生的作用.</p>
评价者	王念良 教授 商洛学院数学与计算机应用学院

案例编号	20031101-043
案例标题	第一型曲线积分
案例来源	原创
内容简介	本节通过荀子《劝学》中的经典语句和积分思想引入第一型曲线积分定义和计算.
关键词	第一型曲线积分
编写时间	2022-7-3
编著者	孔亮, 商洛学院
素材形式	文字、图片等
育人主题	培养学生脚踏实地的精神, 为实现中国梦而努力.
素材长度	1034
	<p>案例一 不积跬步, 无以至千里; 不积小流, 无以成江海. —荀子《劝学》.</p> <p>荀子(约公元前 313—前 238), 名况, 字卿, 汉族, 因避西汉宣帝刘询讳, 因“荀”与“孙”二字古音相通, 故又称孙卿. 周朝战国末期赵国人. 著名思想家、文学家、政治家, 儒家代表人物之一, 时人尊称“荀卿”. 曾三次出齐国稷下学宫的祭酒, 后为楚兰陵(今山东兰陵)令. 荀子对儒家思想有所发展, 提倡性恶论, 常被与孟子的性善论比较. 对重整儒家典籍也有相当的贡献.</p> <p>案例二 曲边梯形的面积. 积分的思想是先分割, 再近似, 然后求和, 最后求极限得到精确值. 这一思想不仅适用于一元函数定积分, 也适用于多元函数重积分、曲线积分、曲面积分等. 积分的本质在于通过将一个复杂或连续的变化过程分割为无数个极小的时间(或空间)单元(即“微元”), 然后对每个微元对应的量值进行累加. 这种思想体现了从局部到整体的转变, 允许我们从对单个微元的处理过渡到对整体的描述, 即使在面对非均匀变化或者复杂函数时也能准确地反映出累积效果. 积分与求和的关系在于它是对无限多个数值趋于无限小的极限求和过程, 可以看作是无穷级数求和或者无穷多矩形面积叠加的推广.</p> <p>积分的思想起源于古代, 早在公元前 7 世纪, 古希腊科学家、哲学家泰勒斯就对球的面积、体积、与长度等问题的研究就含有微</p>



积分思想. 公元前 3 世纪, 古希腊的数学家、力学家阿基米德以及中国古代数学家刘徽等人的著作中就已含有积分学的萌芽. 微积分的最初建立是为了解决一系列的工程问题, 如炮弹的最大射程问题、切线问题等, 而积分学的思想上千年前就已经出现, 比如求圆面积时使用的割圆术.



知识点

设一构件(物体)占 xoy 面内一段曲线弧 L , 端点为 A 、 B , 线密度 $\rho(x, y)$ 连续, 求构件质量 M .

- (1) 将 L 分割 $\Delta s_i (i = 1, 2, \dots, n)$
- (2) $\forall (x_i, y_i) \in \Delta s_i, \Delta M_i \approx \rho(x_i, y_i) \cdot \Delta s_i$
- (3) $M \approx \sum_{i=1}^n \rho(x_i, y_i) \cdot \Delta s_i$
- (4) $M = \lim_{\lambda \rightarrow 0} \sum_{i=1}^n \rho(x_i, y_i) \cdot \Delta s_i$

其中 $\lambda = \max\{\Delta s_1, \Delta s_2, \dots, \Delta s_n\}$.

定义 1 L 为 xoy 面内的一条光滑曲线弧, $f(x, y)$ 在 L 上有界, 用 M ; 将 L 分成 n 小段 Δs_i , 任取一点 $(\varepsilon_i, \eta_i) \in \Delta s_i (i = 1, \dots, n)$ 作和

$$\sum_{i=1}^n f(\varepsilon_i, \eta_i) \Delta s_i, \text{ 令 } \lambda = \max\{\Delta s_1, \dots, \Delta s_n\}, \text{ 若当 } \lambda \rightarrow 0 \text{ 时 } \lim_{\lambda \rightarrow 0} \sum_{i=1}^n f(\varepsilon_i, \eta_i) \Delta s_i$$

存在, 则称此极限值为 $f(x, y)$ 在 L 上第一型曲线积分, 记为

$$\int_L f(x, y) ds, \text{ 即}$$


$$\int_L f(x, y) ds = \lim_{\lambda \rightarrow 0} \sum_{i=1}^n f(\varepsilon_i, \eta_i) \Delta s_i$$

定理 1 设 $f(x, y)$ 在弧 L 上有定义且连续, L 方程为

$$\begin{cases} x = \varphi(t) \\ y = \psi(t) \end{cases} (\alpha \leq t \leq \beta),$$

$\varphi(t), \psi(t)$ 在 $[\alpha, \beta]$ 上有一阶连续导数且 $\varphi'^2(t) + \psi'^2(t) \neq 0$, 则

	<p>则曲线积分 $\int_L f(x,y)ds$ 存在,</p> $\int_L f(x,y)ds = \int_a^\beta f[\varphi(t),\psi(t)]\sqrt{\varphi'^2(t)+\psi'^2(t)}dt$ <p>【思政元素】 1. 有限积蓄无限，以量变积蓄质变，第一型曲线积分的定义体现了对立和统一、量变到质变的逻辑思维.</p> <p>2. 鼓励学生以“十年磨一剑”的精神和“不积跬步无以至千里”的决心，脚踏实地，在一点一滴的积累中提高自身综合素质，锤炼奋斗精神，实现人生价值.</p> <p>3. 无论一元函数定积分、多元函数重积分，还是曲线积分，其本质都是相似的，都可以看作是无数个微元的累积过程. 梦想的实现需要我们将梦想分成若干小的具体的目标，通过脚踏实地完成一个一个小目标，在奋斗的路上，不断努力和追求，总有一天中国梦一定会实现.</p>
分析评价	<p>本案例通过荀子《劝学》中的经典语句和积分思想引入第一型曲线积分定义和计算. 培养学生“十年磨一剑”的精神和“不积跬步无以至千里”的决心, 为实现中国梦不断努力.</p>
评价者	<p>王晓 教授，商洛学院数学与计算机应用学院</p>

案例编号	20031101-044
案例标题	第二型曲线积分
案例来源	原创
内容简介	通过松枝上的积雪和曲直替代的辩证观引入第二型曲线积分的定义和计算,让学生深刻领会微积分曲直的辩证关系,引导他们“方做人,圆处事”.通过介绍格林的故事引入格林公式,培养学生热爱科学和对科学产生兴趣,让学生学会自学和思考,并树立独立解决问题的信心.
关键词	第二型曲线积分
编写时间	2022-3-1
编著者	孔亮, 商洛学院
素材形式	文字、图片等
育人主题	让学生深刻领会微积分曲直的辩证关系,培养求真创新的科学态度.
素材长度	1489
	<p>案例一 一场大雪中,松枝上的积雪越来越厚,眼看就要把松枝压断了,就在这时,那富有生气的枝丫向下弯曲,雪从枝头滑落.这样反复地积,反复地落,雪松仍旧完好无损.可其他树的树枝就不懂得在重压下弯曲,以致常常就被积雪压断.</p> <p>案例二 哲学中曲直替代的辩证观.我国古代儒家思想中的“外圆内方”的处世哲学,就是在对坐标的曲线积分的学习中,学生首先了解的是数学概念的曲直转化,延伸到学生日常生活中,对学生的个人成长具有重大的指导意义,具体体现在为人处世的思想.我国古代儒家思想中的“外圆内方”的处世哲学,就是“曲直”思维的最好诠释.</p> <p>案例三 英国数学家乔治·格林简介: 乔治·格林 (<i>George Green</i>, 1793-1841) 的学生生涯只有短短的两个学期. 他的小学校长 <i>Robert Goodacre</i>, 对格林的影响深刻. 这位校长写过许多关于数学以及教育方面的教科书,他通过演讲成功地激发并培养了幼小乔治·格林 (1793-1841) 的格林在数学和自然科学方面的兴趣 并使之发扬光大,直到不可思议地在科学上做出巨大的贡献. 因为要给父亲的面包坊照料生意,格林早早辍学,但格林</p> 

没有间断自学. 他自学了包括拉普拉斯(Laplace)的《天体力学》等著作以及拉格朗日(Lagrange)的关于数学物理方面的著作的英文版本. 1828年格林出版了他的最重要的科学著作《关于数学分析应用于电磁理论的一篇论文》. 1829年, 父亲去世后, 格林进入剑桥 *Gonville and Caius* 学院学习, 格林在此期间发表了对后世有重要影响的学术成果. 美国数学史家莫里斯·克莱因评价说: “格林是第一个沿着欧洲大陆上的工作线索前进的英国大数学家, 他的工作培养了人数众多的数学物理学者——剑桥学派, 其中包括威廉·汤姆孙爵士、斯托克斯爵士、瑞利勋爵和克拉克·麦克斯韦.” 这一评价不仅说明了格林对剑桥学派以至整个英国科学界的影响, 也指出了格林研究工作的渊源, 那就是法国、德国等数学物理学家们开创的位势理论.

知识点

有向曲线: 规定了方向的曲线, 或有起点和终点的曲线; 简单闭曲线 L 的方向: 逆时针为正.

设一质点在 xoy 面内从点 A 沿光滑曲线弧 L 移到点 B , 受力 $\vec{F}(x, y) = P(x, y)\vec{i} + Q(x, y)\vec{j}$, 其中 P, Q 在 L 上连续. 求上述过程所做的功.

①分割: 先将 L 分成 n 个小弧段 $\overline{M_{i-1}M_i} (i=1, 2, \dots, n)$

②近似代替: $\Delta\omega_i \approx F(\varepsilon_i, \eta_i) \cdot \overline{M_{i-1}M_i}$

③求和: $\omega \approx \sum_{i=1}^n [P(\varepsilon_i, \eta_i)\Delta x_i + Q(\varepsilon_i, \eta_i)\Delta y_i]$

④取极限: $\omega = \lim_{\lambda \rightarrow 0} \sum_{i=1}^n [P(\varepsilon_i, \eta_i)\Delta x_i + Q(\varepsilon_i, \eta_i)\Delta y_i]$

定义1 设 L 为 xoy 面内从点 A 到点 B 的一条有向光滑曲线弧, 函数 $P(x, y), Q(x, y)$ 在 L 上有界. 在 L 上沿 L 的方向任意插入一点列 $M_{i-1}(x_{i-1}, y_{i-1}) (i=1, 2, \dots, n)$ 把 L 分成 n 个有向小弧段

$$\overline{M_{i-1}M_i} (i=1,2,\dots,n; M_0=A, M_n=B)$$

设 $\Delta x_i = x_i - x_{i-1}$, $\Delta y_i = y_i - y_{i-1}$ 点 (ε_i, η_i) 为 $\overline{M_{i-1}M_i}$ 上任意取定的点. 如果当每个小弧段长度的最大值 $\lambda \rightarrow 0$ 时, $P(\varepsilon_i, \eta_i) \Delta x_i$ 的极限总存在, 则称此极限为函数 $P(x, y)$ 在有向曲线弧 L 上对坐标 x 的曲线积分, 记作 $\int_L P(x, y) dx$ 类似地, 如果 $\sum_{i=1}^n Q(\varepsilon_i, \eta_i) \Delta y_i$ 的极限值总存在, 则称此极限为函数 $Q(x, y)$ 在有向曲线弧 L 上对坐标 y 的曲线积分, 记作 $\int_L Q(x, y) dy$. 即

$$\int_L P(x, y) dx = \lim_{\lambda \rightarrow 0} \sum_{i=1}^n P(\varepsilon_i, \eta_i) \Delta x_i$$

$$\int_L Q(x, y) dy = \lim_{\lambda \rightarrow 0} \sum_{i=1}^n Q(\varepsilon_i, \eta_i) \Delta y_i$$

定理 1 设 $P(x, y)$, $Q(x, y)$ 在 L 上连续, L 的参数方程为:

$$\begin{cases} x = \phi(t) \\ y = \psi(t) \end{cases}$$

当 t 单调地从 α 变到 β 时, 点 $M(x, y)$ 从 L 的起点 A 沿 L 变到终点 B , 且 $\phi(t)$, $\psi(t)$ 在以 α , β 为端点的闭区间上具有一阶连续导数, 且 $\phi^2(t) + \psi^2(t) \neq 0$, 则 $\int_L P(x, y) dx + Q(x, y) dy$ 存在, 且

$$\int_L P(x, y) dx + Q(x, y) dy = \int_{\alpha}^{\beta} \{P[\phi(t), \psi(t)]\phi'(t) + Q[\phi(t), \psi(t)]\psi'(t)\} dt$$

定义 2 若积分 $\int_L P dx + Q dy$ 仅与 L 的起点与终点有关, 称积分 $\int_L P dx + Q dy$ 与路径无关.

单连通区域(无洞) 设 D 为平面区域, 若 D 内任一闭曲线所围的部分都属于 D , 称 D 为单连通区域, 否则称为复连通区域(有洞). 区域 D 的边界曲线 L 的方向, 当观看者沿 L 行走时, D 内在他近处的那一部分总在他的左边.

	<p>定理 2 设闭区域 D 由分段光滑的曲线 L 围成, 函数 $P(x, y)$ 和 $Q(x, y)$ 在 D 上具有一阶连续偏导数, 则有</p> $\iint_D \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} \right) dx dy = \oint_L P dx + Q dy.$ <p>L 为 D 的取正向的边界曲线.</p> <p>【思政元素】 1. 在学生的人格塑造中, 应融入“曲”和“直”两个概念, 帮助他们深刻领会微积分曲直的辩证关系, 引导他们“方做人, 圆处事”, 既锤炼光明正大、明辨是非的高尚品格, 又运用机智圆通、灵活老练的精妙技巧, 进一步有效地解决生活实践中遇到的人际关系问题、工作环境问题、社会竞争问题等.</p> <p>2. 介绍数学家格林在数学史伟大的贡献和自学成才的传奇人生, 让学生学会自己思考, 并树立独立解决问题的信心. 让学生学习数学家格林自强不息的精神品格, 培养学生热爱科学和对科学产生兴趣, 让学生学会自学和思考, 并树立独立解决问题的信心.</p>
分析评价	<p>本案例通过松枝上的积雪和曲直替代的辩证观, 让学生深刻领会微积分曲直的辩证关系. 通过介绍格林的故事培养学生热爱科学和对科学产生兴趣, 让学生学会自学和思考, 并树立独立解决问题的信心.</p>
评价者	王晓 教授, 商洛学院数学与计算机应用学院

案例编号	20031101-045
案例标题	二重积分的定义
案例来源	原创
内容简介	通过介绍将割补法,让学生了解古代数学家如何探究平面图形的面积,提升学生的文化自信;由曹冲称象联想到累加求和,进而计算曲顶柱体体积,展示化整为零、集零为整的数学思想.引导学生体会我国古代儒家思想中的“外圆内方”的处世哲学,脚踏实地,努力奋斗,实现中华民族的伟大复兴.
关键词	二重积分;曲顶柱体;平面图形的面积
编写时间	2023-2-20
编著者	孔亮 商洛学院
素材形式	文字、图片等
育人主题	掌握化整为零、集零为整的数学思想和方法;培养脚踏实地和努力奋斗的精神和品质.
素材长度	1250
案例正文	<p>案例一 与平面图形面积相关的数学史主要包括古埃及、古巴比伦、古印度和古代中国四部分的历史.古埃及是几何的发源地,当地的居民很早就开始对土地进行测量,开始对平面图形的面积进行计算.在公元前 1650 年左右的著作《莱因德纸草书》中就对矩形、三角形和梯形进行了面积计算.我国古代《九章算术注》中对长方形的面积公式做了论述.同时,还通过“以盈补虚”的方式将三角形、直角梯形和等腰梯形割补成长方形来进行验证计算.从整体上来看,影响东西方数学发展最大的就是古希腊的《几何原本》和我国的《九章算术注》,在这些著作中,探究平面图形的面积公式时都涉及了割补法.</p> <p>知识点 若平面图形 P 的内面积 \underline{I}_P 等于它的外面积 \bar{I}_P, 则称 P 为可求面积, 并称其共同值 $I_P = \underline{I}_P = \bar{I}_P$ 为 P 的面积.</p> <p>【思政元素】 将割补法的理念引入其中, 让学生了解古代数学家如何探究平面图形的面积, 提升学生的文化自信.</p> <p>案例二 曹冲生五六岁, 智意所及, 有若成人之智. 时孙权曾致巨象, 太祖欲知其斤重, 访之群下, 咸莫能出其理. 冲曰: “置象大船之上, 而刻其水痕所至, 称物以载之, 则校可知矣.” 太祖悦, 即施行焉.</p>

案例二 刘徽“割圆术”：割之弥

细，所失弥少，割之又割，以至不可割，
则与圆周合体而无所失矣. 求曲顶柱体
的体积蕴含“以直代曲”的思想和方法.



刘徽是我国伟大的数学家，提出了计算

圆周率的方法，奠定了此后千余年来中国圆周率计算在世界上的领先地位.

知识点 设 $f(x, y)$ 为定义在可求面积的有界闭区域 D 上的非负连续函数，求以曲面 $z = f(x, y)$ 为顶， D 为底的主体的体积 V .

先用一组平行于坐标轴的直线网 T 把区域 D 分成 n 个小区域 $\sigma_i (i = 1, 2, \dots, n)$ ，以 $\Delta\sigma_i$ 表示小区域 σ_i 的面积. 这个直线网相应地把曲顶柱体分割成 n 个以 σ_i 为底的小曲顶柱体 $V_i (i = 1, 2, \dots, n)$. 由于 $f(x, y)$ 在区域 D 上连续，因而可在 σ_i 上任取一点 (ξ_i, η_i) ，用以 $f(\xi_i, \eta_i)$ 为高， σ_i 为底的小平顶柱体的体积作为 V_i 的体积 ΔV_i 的近似值，把这些小平顶柱体的体积加起来，就得到曲顶柱体体积 V 的近似值

$$V = \sum_{i=1}^n \Delta V_i \approx \sum_{i=1}^n f(\xi_i, \eta_i) \Delta \sigma_i.$$

【思政元素】 由曹冲称象联想到累加求和，从部分到整体的思想，计算曲顶柱体体积，采用“分割、近似求和、取极限”的方法，其中蕴含着“化整为零、集零为整”的数学思想. 引导学生对待困难问题，采取化整为零，各个击破的方法. 同时培养学生的文化自信.

知识点 设 $f(x, y)$ 是定义在可求面积的有界闭区域 D 上的函数， J 是一个确定的数. 若对任给的正数 ε ，总存在某个正数 δ ，使

	<p>对于 D 的任何分割 T，当 $\ T\ < \delta$ 时，有</p> $\left \sum_{i=1}^n f(\varepsilon_i, \eta_i) \Delta\sigma_i - J \right < \varepsilon,$ <p>则称 $f(x, y)$ 在 D 上可积，数 J 称为函数 $f(x, y)$ 在 D 上的二重积分，记作 $J = \iint_D f(x, y) d\sigma$，其中 $f(x, y)$ 称为被积函数，x 与 y 称为积分变量，D 称为积分区域。</p> <p>【思政元素】 体现了对立和统一、量变到质变的逻辑思维。引导学生体会我国古代儒家思想中的“外圆内方”的处世哲学，就是“曲直”思维的最好诠释。在学生的人格塑造中，应融入“曲”和“直”两个概念，引导他们“方做人，圆处事”，既锤炼光明正大、明辨是非的高尚品格，又运用机智圆通、灵活老练的精妙技巧，延伸到学生日常生活中，对学生的个人成长具有重大的指导意义，具体体现在为人处世的思想，有效地解决生活实践中遇到的人际关系问题、工作环境问题、社会竞争问题等。引导学生学习体会积少成多、不积跬步无以至千里的道理，在实现中国梦的道路上，脚踏实地地完成一个一个目标，就能实现中华民族的伟大复兴。</p>
分析评价	<p>本案例通过介绍古代数学家如何探究平面图形的面积，提升学生的文化自信；通过计算曲顶柱体体积，使学生体会蕴含着化整为零、集零为整的数学思想。引导学生脚踏实地，努力奋斗，实现中华民族的伟大复兴。</p>
评价者	<p>王晓 教授 商洛学院数学与计算机应用学院</p>

案例编号	20031101-046
案例标题	格林公式
案例来源	原创
内容简介	通过格林公式的学习，培养学生终身学习的习惯和能力；通过格林公式的应用，培养学生运用变通思想解决问题的能力创新意识.
关键词	格林公式；曲线积分；二重积分
编写时间	2023-2-10
编著者	孔亮 商洛学院
素材形式	文字
育人主题	培养学生终身学习的习惯和能力、增强创新意识.
素材长度	1064
案例正文	<p>案例一 乔治·格林（George Green，西元 1793 年 7 月 14 日—西元 1841 年 5 月 31 日）是一位完全自学成才的英国数学家，西元 1828 年发表《论应用数学分析于电磁学》，论文首次引入了格林公式，格林函数，势函数等现在所有大学都在教授的内容.格林的一生传奇在于他几乎是自学成才，他出生在英国诺丁安郡的斯奈顿（现在为诺丁安城一部分），他一生大部分时间都在此度过。他的父亲也名为乔治，是一名面包师傅，建了一座风车磨坊来磨谷物，年轻的乔治只在八至九岁上过一年学校.格林长大后在父亲的风车磨坊工作，父亲于西元 1829 年逝世后他继承了风车磨坊.他自学数学,因为诺丁安所有的知识资源很少，历史学家不清楚他从何得知当时数学发展。那时当地只有一个曾学过数学的人，名为 John Toplis.格林于西元 1828 年发表他的“论文”时，以订阅方式卖给 51 人.其中多数是他的朋友，很可能看不懂内容.数学家 Edward Bromhead 买了一份，鼓励格林继续作数学研究.格林不相信 Edward Bromhead 的诚意，两年没有与对方接触.最后格林联络了 Edward Bromhead，获得协助进入剑桥大学.西元 1833 年他以四十岁之龄成为本科生.他的学术成就不俗，西元 1837 年毕业后留在剑桥冈维尔与凯斯学院的系内.他在光学、声学、流体力学有著作.但在西元 1840 年，他得病返回诺丁安郡，一年后逝世.但格林在世时，他的工作在数学界并不知名，死后他的成就被物理学家发现并应用于物理学和数学领域，取得巨大成功，也因此而闻名于世.</p>

在十九世纪,英国数学家乔治·格林(George Green)偶然想到一个问题:能否用某个区域的边界和边界上的函数来研究该区域内部的情况?

知识点

定理 21.11 若函数 $P(x, y)$, $Q(x, y)$ 在闭区域 D 上连续, 且有连续的一阶偏导数, 则

$$\iint_D \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} \right) d\sigma = \oint_L Pdx + Qdy,$$

其中 L 为区域 D 的边界曲线, 分段光滑, 并取正方向. 上式称为格林公式.

1. 计算 $I = \oint_L \frac{xdy - ydx}{x^2 + y^2}$, 其中 L 为绕原点一周的封闭曲线.

令

$$P(x, y) = \frac{-y}{x^2 + y^2}, \quad Q(x, y) = \frac{x}{x^2 + y^2},$$

则 $P(x, y)$, $Q(x, y)$ 在 L 围成的区域内不满足格林公式的条件, 不能直接应用格林公式求解, 需要去掉以原点为中心的领域, 进而在剩余的区域上应用格林公式. 通过上面例题, 引导学生正确创造条件, 应用格林公式计算相关曲线问题.

2. 若对于平面区域 D 上任一封闭曲线, 皆可不经 D 以外的点而连续收缩于属于 D 的某一点, 则称此平面区域为单连通区域, 否则称为复连通区域. 在应用格林公式中闭区域可以是单连通区域或复连通区域, 避免学生认为只有单连通区域的情况.

【思政元素】 1. 通过介绍格林自学成才的人生经历, 引导学生学习数学家孜孜不倦、勤奋探索的科研精神, 培养学生终身学习的习惯和能力.

2. 在格林公式的应用中巧设障碍, 引导学生在条件不满足时探寻解决问题的方法, 引领学生不断攀登新高度、获取新方法, 培养学生运用变通思想解决问题的能力和创新意识.

	3. 考虑和处理学习和生活中的问题时要全面，不能片面.
分析评价	<p>本案例通过十九世纪英国数学家乔治·格林偶然想到一个问题：能否用某个区域的边界和边界上的函数来研究该区域内部的情况？引入格林公式. 介绍数学家格林的生平，引导学生学习数学家孜孜不倦、勤奋探索的科研精神，培养学生终身学习的习惯和能力；通过在格林公式的应用中巧设障碍，培养学生运用变通思想解决问题的能力 and 创新意识.</p>
评价者	王晓 教授，商洛学院数学与计算机应用学院

案例编号	20031101-047
案例标题	曲面的面积
案例来源	原创
内容简介	激发学生思考热情，培养探索精神，让学生体会数学之美. 培养学生理论练习实际的能力，激发创新创造能力. 深刻体会科学的科学性和严谨性，帮助学生养成良好的学习习惯、思维严谨、工作求实的作风。鼓励学生学习数学，投身基础研究，为将祖国建设成为科技强国而努力！
关键词	空间曲面；面积
编写时间	2023-8-5
编著者	孔亮，商洛学院
素材形式	文字、图片等
育人主题	让学生体会数学之美，体会科学的科学性和严谨性，引导学生为将祖国建设成为科技强国而努力！
素材长度	1030
	<p>案例一 曲面的面积</p> <p>日常生活中曲面几乎无处不在，左图为我国著名建筑--国家大剧院，其外表面为一蛋壳形状的曲面，由于其完美对称，给人带来视觉上极强的舒适感，具有庄重和谐的美感. 在建筑设计时，我们往往需要计算曲面的面积，如何计算国家大剧院外表曲面的面积呢？应该采取什么样的思路解决这个问题呢？</p>  <p>2007年，第一颗北斗导航卫星发射升空，中国全面进入了北斗卫星组网的发射期。2017年，23颗卫星发射成功，而从2017年到2020年，3年间32颗卫星发射升空，这样的速度在全世界的航天大国中都是绝无仅有的。而之所以能有这样的中国速度，北斗导航卫星首席总设计师谢军说：“航天人，就是要多付出一些汗水，同时把产品在有限的时间内做得可靠。”说到这份“可靠”时，谢军语气轻松，但从容的背后其实是他献身航天事业30余载的沉淀。从北斗一号、北斗二号到北斗</p> 

三号，我国已逐步实现所有产品百分之百国产化。

介绍 2023 年 5 月 17 日我国利用长征三号乙运载火箭成功发射第 56 颗北斗导航卫星，不仅是中国还有其他发达国家每年都在发射不少导航卫星，到底发射多少颗卫星能够满足需求？抛出问题：一颗通信卫星能覆盖地球多少范围？

知识点

设曲面 S 由方程 $z = f(x, y)$ 给出， D_{xy} 为曲面 S 在 xoy 面上的投影区域，函数 $f(x, y)$ ，在 D 上具有连续偏导数 $f_x(x, y)$ 和 $f_y(x, y)$ 现计算曲面的面积 A .

在闭区域 D_{xy} 上任取一直径很小的闭区域 $d\sigma$ (它的面积也记作 $d\sigma$)，在 $d\sigma$ 内取一点 $p(x, y)$ ，对应着曲面 S 上一 $M[x, y, f(x, y)]$ ，曲面 S 在点 M 处的切平面设为 T . 以小区域 $d\sigma$ 的边界为准线作母线平行于 z 轴的柱面，该柱面在曲面 S 上截下一小片曲面，在切平面 T 上截下一小片平面，由于 $d\sigma$ 的直径很小，那一小片平面面积近似地等于那一小片曲面面积. 曲面 S 在点 M 处的法线向量 (指向朝上的那个) 为 $\vec{n} = \{-f_x(x, y), -f_y(x, y), 1\}$ ，它与 z 轴正向所成夹角 γ 的方向余弦为

$$\cos \gamma = \frac{1}{\sqrt{1 + f_x^2(x, y) + f_y^2(x, y)}}$$

$$dA = \frac{d\sigma}{\cos \gamma}$$

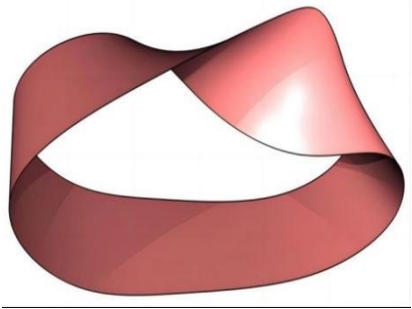

$$dA = \sqrt{1 + f_x^2(x, y) + f_y^2(x, y)} d\sigma$$

这就是曲面 S 的面积元素，故

$$A = \iint_{D_{xy}} \sqrt{1 + f_x^2(x, y) + f_y^2(x, y)} d\sigma$$

例 1 设有一颗地球同步轨道通信卫星，距地面的高度 $h = 36000 \text{ km}$ ，运行的角速度与地球自转的角速度相同. 试计算该通信卫星的覆盖面积与地球表面积的比值.

	<p>由以上例题结果可知，一颗同步卫星覆盖了全球三分之一以上的面积，故使用三颗相隔$\frac{2}{3}\pi$角度的同步卫星就可以覆盖几乎地球全部表面.</p> <p>【思政元素】1. 数学知识不仅在航天领域，在计算机、人工智能等领域有着重要的应用，基础学科的发展才能促进高科技的发展. 鼓励学生学习数学，投身基础研究，为将祖国建设成为科技强国而努力!</p> <p>2. 通过介绍国家大剧院和我国成功发射第五十六颗北斗导航卫星，培养学生的民族自豪感.</p> <p>3. 激发学生思考热情，培养探索精神，让学生体会数学之美. 培养学生理论练习实际的能力，激发创新能力. 深刻体会数学的科学性和严谨性，帮助学生形成良好的学习习惯、思维严谨、工作求实的作风.</p>
分析评价	<p>本案例通过国家大剧院和北斗导航系统，激发学生思考热情，培养探索精神，让学生体会数学之美，帮助学生形成良好的学习习惯、思维严谨、工作求实的作风。鼓励学生学习数学，投身基础研究，为将祖国建设成为科技强国而努力!</p>
评价者	<p>王晓 教授，商洛学院数学与计算机应用学院</p>

案例编号	20031101-048
案例标题	第二型曲面积分
案例来源	原创
内容简介	由应用问题出发,创设情境,引入第二型曲面积分,激发学生兴趣,培养学生民族自豪感和求真创新的科学态度.
关键词	第二型曲面积分
编写时间	2023-5-12
编著者	孔亮, 商洛学院
素材形式	文字、图片等
育人主题	培养学生民族自豪感和求真创新的科学态度.
素材长度	1685
案例正文	<p>案例一 单侧曲面--莫比乌斯带:1858年,德国数学家莫比乌斯把一根纸条扭转180°后,两头再黏结起来做成的纸带圈.普通纸带具有两个面(即双侧曲面),一个正面,一个反面,两个面可以涂成不同的颜色;而这样的纸带只有一个面(即单侧曲面),一只小虫可以爬遍整个曲面而不必跨过它的边缘.这种纸带被称为“莫比乌斯带”.拓展问题:有没有只有一个侧的曲面?</p>  <p>案例二 德国数学家莫比乌斯 (Mobius, 1790-1868)简介:莫比乌斯最初学法学,1809年转向数学,从1809年到1814年他在莱比锡大学学数学并获博士学位.1814年在莱比锡任天文学教师.1815年他获得教授资格,一年后在高斯的推荐下成为特级教授和莱比锡天文台的观测员.1846年他成为王家萨克森科学院建立成员之一.1848年他成为莱比锡天文台台长.1868年9月26日逝世于莱比锡.</p> 

知识点

定义 1 设曲面 $z = z(x, y)$, 若取法向量朝上 (\vec{n} 与 z 轴正向的夹角 γ 为锐角), 则曲面取定上侧, 否则为下侧; 对曲面 $x = x(y, z)$, 若 \vec{n} 的方向与 x 轴正向夹角 α 为锐角, 曲面取定前侧, 否则为后侧; 对曲面 $y = y(x, z)$, \vec{n} 的方向与 y 轴正向夹角 β 为锐角, 曲面取定右侧, 否则为左侧. 若曲面为闭曲面, 则取法向量的指向朝外, 则此时取定曲面的外侧, 否则为内侧; 取定了法向量即选定了曲面的侧, 这种曲面称为有向曲面.

案例三 长江流域是我国水资源配置的战略水源地, 在国家水网总体建设布局中的战略地位日益凸显. 通过不断健全长江流域水工程体系建设, 强化流域



水工程统一联合调度, 长江流域水资源保障能力不断夯实. 万里长江奔涌, 为经济社会发展提供重要水资源保障. 数据显示, 长江多年平均水资源量为 9959 亿立方米, 约占全国的 36%, 居全国各大江河之首. 2023 年 10 月 20 日 13 时, 三峡水库坝前水位达到 175 米, 标志着 2023 年三峡水库满蓄目标顺利实现. 截至 10 月 20 日, 以三峡水库为代表的长江流域控制性水库群蓄水量达 1069 亿立方米, 这是自 2012 年长江流域控制性水库群联合调度以来蓄水量首次超过 1000 亿立方米. 近年来, 水利部门不断健全长江流域水工程体系建设, 强化流域水工程统一联合调度, 加强跨区域水资源丰枯调剂, 不断夯实水资源保障能力. 长江每年供水量超过 2000 亿立方米, 长江流域水工程综合效益显著. 长江流域是我国水资源配置的战略水源地. 长江每年供水量超过 2000 亿立方米, 为区域经济社会发展提供了有力支撑.

“高效开展水资源配置, 离不开控制性水库群的关键作用. 水库群相互配合, 在蓄丰补枯、拦洪削峰上形成集聚效益.” 长江水

利委员会规划计划局规划一处副处长汪鹏介绍,2012年首次开展联合调度时仅有三峡及上游水库共10座,今年纳入联合调度的水库有53座,总调节库容达到1169亿立方米.长江流域控制性水库群整体效益明显提升,在保障流域防洪安全、供水安全、粮食安全、能源安全等方面发挥着举足轻重的作用.“三峡水库每年汛末启动蓄水,为当年冬季和次年春季用水提供保障.近年来,三峡水库每年枯水季节下泄流量提高到每秒6000立方米以上,为长江中下游补水200多亿立方米.”

知识点

设 P, Q, R 为定义在双侧曲面 S 上的函数,在 S 的一侧作分割 T ,它把 S 分为 n 个小曲面 S_1, S_2, \dots, S_n ,分割 T 的细度

$$\|T\| = \max_{1 \leq i \leq n} \{S_i \text{的直径}\},$$

以 $\Delta S_{i_{yz}}, \Delta S_{i_{xz}}, \Delta S_{i_{xy}}$ 分别表示 S_i 在三个坐标面上的投影区域的面积.

在各个小曲面 S_i 上任取一点 (ξ_i, η_i, ζ_i) ,若

$$\lim_{\|T\| \rightarrow 0} \sum_{i=1}^n P(\xi_i, \eta_i, \zeta_i) \Delta S_{i_{yz}} + \lim_{\|T\| \rightarrow 0} \sum_{i=1}^n Q(\xi_i, \eta_i, \zeta_i) \Delta S_{i_{xz}}$$

$$\lim_{\|T\| \rightarrow 0} \sum_{i=1}^n R(\xi_i, \eta_i, \zeta_i) \Delta S_{i_{xy}}$$


存在,且与曲面 S 的分割 T 和 (ξ_i, η_i, ζ_i) 的取法无关,则称此极限为

函数 P, Q, R 在曲面所指定的一侧上的第二型曲面积分,记作

$$\iint_S P(x, y, z) dydz + Q(x, y, z) dzdx + R(x, y, z) dxdy.$$

【思政元素】 三峡工程作为一项举世瞩目的伟大工程,不仅在技术上取得了众多突破,而且在精神层面也形成了独特的“三峡精神”.这种精神贯穿于工程的整个建设过程中,成为推动工程顺利完成的重要动力.科学民主:强调在三峡工程建设和运行过程中注重科学决策和民主参与,确保工程的合理性和可持续性.这种精神体现在从工程可行性论证到民主表决通过方案,再到开展施工、

	<p>建设的全过程. 团结协作：体现在三峡工程建设中各方力量团结一致，共同奋斗. 这种精神不仅体现在工程建设者之间的合作，也体现在与库区人民、全国各地各部门的协作中，共同为三峡工程作贡献. 精益求精：追求工程质量的极致，不断优化和完善，体现追求卓越的工作态度。这种精神在三峡工程修建的过程中得到了充分体现，无论是技术创新还是工程管理，都体现了对卓越的不懈追求.</p> <p>自强不息：展现了中华民族面对困难和挑战时的坚韧不拔的精神. 三峡工程的建成，不仅是中国不断繁荣富强的象征，也向世界展现了中华民族自强不息的精神.</p>
分析评价	<p>本案例由应用问题出发，创设情境，激发学生兴趣，培养学生民族自豪感和求真创新的科学态度，让学生学习“三峡精神”，树立独立解决问题的信心，确立正确的人生观.</p>
评价者	<p>王晓 教授 商洛学院数学与计算机应用学院</p>

案例编号	20031101-049
案例标题	高斯公式
案例来源	原创
内容简介	通过格林公式引入高斯公式，引导学生学习数学家高斯面对人生挫折，努力奋斗的品质和追求完美的精神；通过研究不同的数学概念，大胆猜想，严谨论证，给出结论，培养学生研究数学的思维和方法。
关键词	高斯公式；曲面积分；三重积分
编写时间	2023-3-1
编著者	孔亮 商洛学院
素材形式	文字、图片等
育人主题	培养正确人生观；透过现象洞察本质，求真创新的科学态度。
素材长度	1220
案例正文	<p>案例一 数学家高斯简介:约翰·卡尔·弗里德里希·高斯，德国著名数学家、物理学家、天文学家、大地测量学家，近代数学奠基者之一高斯是近代数学奠基者之一.他和牛顿、阿基米德被誉为数学史上三大杰出的数学家，他的数学研究几乎遍及所有领域，在数论、代数学、非欧几何、复变函数和微分几何等方面都作出了开创性的贡献.高斯从小就展现了数学天赋，三岁时便能指出他父亲账目上的错误，在他的人生中经历很多坎坷:长期资助他研究工作的卡尔·威廉·斐迪南公爵在抵抗拿破仑的耶拿战役阵亡，给他带来了经济上的拮据；妻子的逝世，也曾使得他一度心灰意冷，但是他并没被挫折打倒，而是直面痛苦；在悲伤沮丧中并没有颓废，而是在逆境中奋起，继续他的研究.</p> <p>虽然高斯有着与生俱来的数学天分，但他的成就离不开他勤奋、严谨、虚心钻研的人生态度。我们每个人的天分是不可改变的，但是怀揣着一颗对数学无比热忱的心能帮助我们在追求更高境界的数学的道路上走得更远.高斯对待学问十分严谨，不轻易发表他</p> 

的著作，除非他相信这篇著作已达到完美无缺的地步，任何结论，不论多么重要，都要等他认为完善之后才发表. 数学是一门极严谨的学科，研究者应该有缜密的逻辑思维和严谨的科学态度。高斯做到了这一点，他的座右铭是“少些，但要成熟些”；他的格言“不留下进一步要做的事”. 高斯在科学研究过程中会对某一个定理多次给予不同的证明，以求最简、严谨。他说：“绝不能以为获得一个证明以后，研究便告结束，或把寻找另外的证明当作多余的奢侈品. 有时候你开始没有得到最简单和最完善的证明，但就是这样的证明才能深入到高级算术的真理的奇妙联系中去，这正是吸引我们去继续研究的主动动力，并且最能使我们有所发现.” 学习数学就要像高斯那样不马虎，力求完美.

知识点

如果我们把 18 世纪的数学家们想象为一系列的高峰峻岭，那么最后一座使人肃然起敬的峰巅便是**高斯**.

格林公式

二重积分 \longleftrightarrow 沿平面封闭曲线的曲线积分

高斯公式

三重积分 \longleftrightarrow 沿空间闭曲面的曲面积分

定理 22.5 设空间闭区域 V 是由分片光滑的双侧闭曲面 S 所围成的. 若函数 P, Q, R 在 V 上具有一阶连续偏导数，则


$$\iiint_V \left(\frac{\partial P}{\partial x} + \frac{\partial Q}{\partial y} + \frac{\partial R}{\partial z} \right) dx dy dz = \iint_S P dx dz + Q dz dx + R dx dy$$

其中 S 取外侧，上式称为高斯公式.

【思政元素】1. 高斯曾说过：“若无某种大胆果敢的猜想，一般来说是不可能知识进展的”. 在高斯公式的教学中，恰当给出“发现”：

- (1) 三重积分可以转化为二重积分；
- (2) 曲面积分也可以转化为二重积分；
- (3) 三重积分和曲面积分是否可以通过二重积分这个“桥梁”

	<p>联系起来？</p> <p>(4) 展示高斯公式的证明过程，最后给出完美数学结论.</p> <p>2. 通过这个过程既能潜移默化培养学生研究数学的正确思路和方法，又能带领学生领悟数学的发展历程，养成研究数学的习惯，有效培养数学思维和能力. 指出世界上万事万物都是相互联系着的. 联系构成事物的运动，运动引起事物的变化，发现事物之间的联系是学业成功的关键，引导学生懂得事物本身是普遍联系的.</p> <p>3. 三大公式（格林公式、高斯公式、斯托克斯公式）统一于流形上的斯托克斯定理. 将不同的数学公式有效的统一起来.</p> <p>4. 唯物辩证法--以联系发展的观点看问题.</p>
分析评价	<p>本案例通过格林公式引入高斯公式，介绍数学家高斯的生平，引导学生学习数学家高斯面对人生挫折时，展现的坚毅品格和敢于挑战困难的坚定信心，培养学生自强不息和追求完美的精神，树立正确的人生观；通过研究高斯公式，培养大学生的数学思维和数学研究能力.</p>
评价者	<p>王晓 教授，商洛学院数学与计算机应用学院</p>

案例编号	20031101-050
案例标题	斯托克斯公式
案例来源	原创
内容简介	本案例通过斯托克斯生平和其贡献的娓娓道来引人入胜,吸引学生产生对所学内容的浓厚兴趣,通过数学史进行数学教育,使学生体会数学公理与公式产生的过程,是一代代数学家们积累、探索、求真的过程,激励学生在求学道路上应该笔耕不辍,勤奋努力,不断探索.
关键词	斯托克斯公式;“站在巨人的肩膀上”的斯托克斯
编写时间	2023-3-1
编著者	王瑞 商洛学院
素材形式	文字、图片等
育人主题	激励学生在求学道路上应该笔耕不辍,勤奋努力,不断探索
素材长度	1497
案例正文	<p>案例一 “站在巨人的肩膀上”的斯托克斯</p> <p>斯托克斯生于爱尔兰的一个小镇,他是六兄妹中最小的一个,从小就非常有教养.他的父亲是一个有知识的人,注重拓宽孩子们的知识面,如教他们学习拉丁语等等.1832年,斯托克斯进入都柏林学校学习.学习期间,他的父亲因病去世,他只能寄居在叔叔家中,而不能象别的孩子那样寄宿,因为家庭已负担不起他的生活开支.1835年,16岁的斯托克斯来到英格兰,在布里斯托尔学院求学.1837至1841年,在彭布罗克学院学习,毕业时,以在数学方面优异的成绩获得了史密斯奖学金(他是获得此奖学金的第一人),此后,他在别人的指导下着手流体动力学方面的研究工作.1842年到1843年期间斯托克斯发表了题为“不可压缩流体运动”的论文;1846年他所作的“关于流体动力学的研究”的报告也许是使他成为一名数学家的最重要的转折点.1849年,斯托克斯被聘任为剑桥大学的数学教授,同时获得剑桥大学卢卡斯数学教授席位,并任卢卡斯教授长达50年.1903年2月1日,著名英国物理学家、数学家斯托克斯在剑桥逝世.斯托克斯在对光学和流体动</p> 

力学进行研究时, 推导出了在曲线积分中最有名的被后人称之为“斯托克斯公式”的定理. 直至现代, 此定理在数学、物理学等方面都有着重要而深刻的影响. 该公式其实是他 1854 年为史密斯奖试卷所写的考题. 斯托克斯的主要贡献是对粘性流体运动规律的研究. 1821 年他发现了纳维-斯托克斯方程, 它后来成为流体力学中最基本的方程组. 被称为“经典物理学最后的疑团”的湍流理论的中心问题便是求这个方程组的统计解.

事实上, 斯托克斯的研究是建立在剑桥大学前一辈科学家的研究成果之上的, 可以用牛顿的“站在巨人的肩膀上”来形容. 对他有重要影响的数学家包括拉格朗日、拉普拉斯、傅立叶、泊松和柯西等, 他们均是大名鼎鼎的数学家. 由此可见做学术研究不仅需要像佩雷尔曼那样的独立钻研的精神, 也需要前辈的指引.

知识点 斯托克斯公式 (曲面 Σ 上的曲面积分与沿着 Σ 的边界曲线所做的曲线积分之间的联系)

定理 2 设 Γ 为分段光滑的空间有向闭曲线, Σ 是以 Γ 为边界的分片光滑的有向曲面, Γ 的正向与 Σ 的侧符合右手规则, 函数 $P(x, y, z)$ 、 $Q(x, y, z)$ 、 $R(x, y, z)$ 在曲面 Σ (连同边界) 上具有一阶连续偏导数, 则有

$$\begin{aligned} & \iint_{\Sigma} \left(\frac{\partial R}{\partial y} - \frac{\partial Q}{\partial z} \right) dydz + \left(\frac{\partial P}{\partial z} - \frac{\partial R}{\partial x} \right) dzdx + \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} \right) dxdy \\ &= \oint_{\Gamma} Pdx + Qdy + Rdz. \end{aligned}$$

记忆方式:

$$\iint_{\Sigma} \begin{vmatrix} dydz & dzdx & dxdy \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ P & Q & R \end{vmatrix} = \oint_{\Gamma} Pdx + Qdy + Rdz,$$

或

$$\iint_{\Sigma} \begin{vmatrix} \cos\alpha & \cos\beta & \cos\gamma \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ P & Q & R \end{vmatrix} dS = \oint_{\Gamma} Pdx + Qdy + Rdz,$$

	<p>其中 $\boldsymbol{n}=(\cos\alpha, \cos\beta, \cos\gamma)$ 为有向曲面 Σ 的单位法向量.</p> <p>例 1 利用斯托克斯公式计算曲线积分</p> $I = \oint_{\Gamma} (y^2 - z^2)dx + (z^2 - x^2)dy + (x^2 - y^2)dz ,$ <p>其中 Γ 是用平面 $x+y+z=\frac{3}{2}$ 截立方体: $0 \leq x \leq 1, 0 \leq y \leq 1, 0 \leq z \leq 1$ 的表面所得的截痕, 若从 x 轴的正向看去取逆时针方向.</p> <p>【思政元素】 斯托克斯公式是微积分基本公式在曲面积分情形下的推广, 它也是格林公式的推广, 这一公式给出了在曲面块上的第二类曲面积分与其边界曲线上的第二类曲线积分之间的联系.</p> <p>通过斯托克斯生平和其贡献的讲述, 不仅让学生了解到斯托克斯是一位伟大的数学家、物理学家, 更让学生深刻体会数学公式推导过程, 体验探索求知的乐趣和科学进步过程中的积累性.</p>
分析评价	<p>本案例通过斯托克斯生平和其贡献的娓娓道来引人入胜, 吸引学生产生对所学内容的浓厚兴趣, 通过数学史进行数学教育, 使学生体会数学公理与公式产生的过程, 是一代代数学家们积累、探索、求真的过程, 激励学生在求学道路上应该笔耕不辍, 勤奋努力, 不断探索.</p>
评价者	王念良 教授 商洛学院数学与计算机应用学院