

商洛学院课程思政案例库

课程名称： 高等数学

负 责 人： 李超

编著时间： 2022 年 6 月

教务处印制

前言

2016 年 12 月，习近平总书记在全国高校思想政治工作会议中指出“要坚持把立德树人作为中心环节，把思想政治工作贯穿教育教学全过程，实现全程育人、全方位育人，努力开创我国高等教育事业发展新局面”。2020 年 5 月，教育部印发了《高等学校课程思政建设指导纲要》，纲要中指出“理工类课程要在教学中把马克思主义立场观点方法的教育与科学精神的培养结合起来，提高学生正确认识问题、分析问题和解决问题的能力，要注重科学思维方法的训练和科学伦理的教育，培养学生探索未知、追求真理、勇攀科学高峰的责任感和使命感”。

高等数学作为大学数学各专业必修的专业基础课，广泛应用于社会、经济、科学等各个领域。“课程思政”在数学课程教学中可以实现知识、能力和价值观教育的一体化，充分发挥出数学课程的育人功能，实现数学人文教育的目标。

本案例库是商洛学院《高等数学》课程入选 2021 年陕西省课程思政示范课程建设项目的阶段性成果。在挖掘高等数学课程思政元素方面采取了“数学+”的模式，将哲学、文学、史学、科技、时政、生活、美学等知识有机融入数学课程教学中，寓思政育人于数学教学中。主要包括函数、极限与连续、一元函数微分学、一元函数积分学、微分方程、

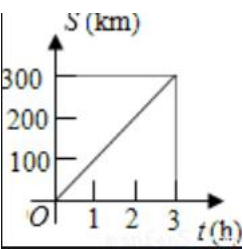
空间解析几何、多元函数微积分、无穷级数等教学内容的 50 个课程思政案例设计。

校内专家对各个案例评价后认为，高等数学课程教学团队依据数学课程的特点，以立德树人为根本任务，从文史哲、科技、时政等方面挖掘了课程思政元素，并有机融入到课程教学中。案例库中收录的案例涵盖了高等数学课程的知识点，经几轮次的教学实践检验，达到了“如盐溶于水”“润物细无声”的效果。

目 录

AME001——映射与函数	1
AME002——数列的极限	3
AME003——数列的极限	6
AME004——无穷小与无穷大、无穷小的比较	8
AME005——极限运算法则、两个重要极限	9
AME006——函数的连续性与间断点	11
AME007——连续函数的运算与初等函数的连续性、闭区间上连续函数的性质	13
AME008——导数的定义	15
AME009——导数的概念	22
AME010——高阶导数	24
AME011——高阶导数	28
AME012——微分中值定理	30
AME013——微分中值定理	35
AME014——泰勒公式	38
AME015——泰勒公式	40
AME016——函数的单调性	42
AME017——函数的极值与最值	45
AME018——函数的极值和最值	49
AME019——函数曲线的凹凸性	53
AME020——函数的凹凸性与拐点	59
AME021——不定积分的概念及性质	63
AME022——不定积分的概念及性质	66
AME023——换元积分法	68
AME024——换元积分法	71
AME025——分部积分法	73
AME026——定积分的概念	76
AME027——无穷限的反常积分	80
AME028——定积分的应用	83
AME029——微分方程的基本概念	87
AME030——微分方程的基本概念	93

AME031——可降阶的高阶微分方程	100
AME032——数量积与向量积	106
AME033——空间直角坐标系	109
AME034——空间曲线	113
AME035——多元函数的基本概念	118
AME036——偏导数	124
AME037——隐函数求导	130
AME038——空间曲线的切线与法平面	134
AME039——方向导数与梯度	137
AME040——多元函数的极值和最值	140
AME041——二重积分的概念	144
AME042——二重积分的计算	148
AME043——曲面的面积	153
AME044——对弧长的曲线积分	155
AME045——曲线积分	158
AME046——曲面积分	164
AME047——常数项级数的概念	167
AME048——正项级数及其审敛法	170
AME049——函数展开成幂级数	174
AME050——函数展开成幂级数	178

案例编号	AME001
案例标题	映射与函数
案例来源	原创
内容简介	1. 由新能源汽车引出路程与速度的关系. 2. 由国庆阅兵引出炮弹发射高度与时间的关系. 3. 生活中的水费、电费引出特殊一类函数——分段函数.
关键词	映射，函数，分段函数
编写时间	2021-6-29
编著者	刘敏，讲师，商洛学院
素材形式	文字、图片、表格等
育人主题	爱国情怀与职业素养
素材长度	755
案例正文	1. 近几年我国自主研发能力日渐提高，特别是新能源汽车，指的是可以利用非常规的车用燃料搭配新型的车载动力装置，生产出有新技术、新结构的汽车。目前新能源汽车包括纯电动汽车、增程式电动汽车、混合动力汽车、燃料电池电动汽车、氢发动汽车等。中国在 1980 年成功造出第一辆氢能汽车，现在新能源汽车发展势头强劲，国家出台了一系列政策鼓励当地车企建立新能源汽车基地。假设该汽车以 100km/h 的速度匀速行驶，汽车路程与时间的关系表示为 $S=100t$，像这种关系我们用数学描述为什么函数？   2. 我国 70 周年国庆大阅兵的场景大家还记忆犹新，随着义勇军进行曲缓缓响起，各类方队开始接受人民检阅，一排排重型武器展示了我们国家强大的军事力量，这次阅兵是中国特色社会主义进入新时代的首次国庆阅兵，彰显了中华民族从站起来、富起来迈向强起来的雄心壮志，人民军队以全新面貌接受主席检阅，接受党和人民检阅，我们作为普通中国人很骄傲，其中一类重型武器——超声巡航导弹格外彰显国家实力，那么炮弹发射高度与发射时间我们用数学描述为什么函数？   3. 生活中的水费问题：某市按以下规定收取每月水费，用量不

	超过 6 吨，每吨 1.2 元，超过 6 吨则超过部分每吨 2 元。如果某用户某月用水量为 x 吨，他应交水费是多少？由此问题引出一类特殊函数——分段函数。实际生活中电费问题也属于同一类问题。通过水电费与用量的关系式启示同学们数学问题来源于生活实际问题，从而培养学生应用数学的意识。由超出部分的价格分析培养学生节约用水，爱护水资源的环保意识。 
分析评价	本案例从科技创新、国庆阅兵、水资源保护等方面为例，在讨论函数相关概念的时候，培养学生的创新意识、爱国精神和环保意识。在传授知识的同时，做到了“润物细无声”地育人。
评 价 者	杨存典教授，商洛学院学生处

案例编号	AME002
案例标题	数列的极限
案例来源	原创
内容简介	以刘徽割圆术以及《金刚川》电影的极限思维为引，融合课程思政特色，激发学生的学习兴趣，让学生理解数列极限的同时，能够发现和分析生活中的极限思想。从宏观方面，帮助学生探寻数学知识中蕴含的人生哲理和辩证唯物观，提升学生的文化自信和民族自豪感，激发民族自尊心和爱国主义情感，培养学生的责任意识，传承科学家的科学精神。从微观方面，讲解极限的思想就是让学生要不忘初心，砥砺前行，精益求精，无限接近，方得始终，具备“水滴石穿”的精神，坚持才能成功。
关键词	数列；数列极限；收敛
编写时间	2020-11-22
编著者	李超教授，数学与计算机应用学院
素材形式	文字、图片等
育人主题	不忘初心，砥砺前行，精益求精，无限接近，方得始终，具备“水滴石穿”的精神，坚持才能成功。
素材长度	1088
案例正文	引例 1 极限思想（刘徽割圆术），介绍我国古代数学家对数列极限思想和圆周率所做的贡献。 图 1 刘徽割圆术 引例 2 微视频（2 分钟）：《金刚川》电影的部分片段。 图 2 《金刚川》人桥 引例 3 水滴石穿的极限思维。 图 3 水滴石穿 上面的例子中都含有数列的应用和数列极限思维。

	思政元素： (1) 刘徽割圆术：激发民族自尊心和爱国主义情感和增强求知欲，引导学生传承祖先文化，培养学生的责任意识，传承科学家的科学精神。 (2) 《金刚川》人桥：树立学生的辩证唯物观，理想，不忘初心，坚持理想，砥砺前行。 (3) 水滴石穿：古代诗词及成语融入的极限思想，增强民族的向心力和凝聚力。 (一) 分析问题，解决问题：将上面的例子抽象成数学的语言，发掘自变量。引入数列的定义。 1. 数列定义在自然数集上的函数，记为 $x_n = f(n), n = 1, 2, 3, \dots$，由于全体自然数可以从小到大排成一列，因此数列的对应值也可以排成一列：$x_1, x_2, \dots, x_n, \dots$，第 n 项 x_n 称为一般项或通项。 2.用圆内接正 $6 \times 2^{n-1}$ 边形的面积来近似代替该圆的面积时，得到数列 $A_1, A_2, \dots, A_n, \dots$ 3.设人数为 n，桥的长度记为 x_n，$x_n = f(n), n = 1, 2, 3, \dots$ 从大到小排列 $x_1, x_2, \dots, x_n, \dots$ 4.设水滴数为 n，腐蚀的质量为 x_n，$x_n = f(n), n = 1, 2, 3, \dots$ 从大到小排列 $x_1, x_2, \dots, x_n, \dots$ 总结：对于上面三个例子，都会趋于一定的极限，数列最重要的是研究其在变化过程中无限接近某一常数的那种渐趋稳定的状态，这就是常说的数列的极限问题。（区别数列和数列的极限） (二) 数列极限探讨 (1) $1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \dots, \frac{1}{n}, \dots$; (2) $2, 4, 6, \dots, 2n, \dots$; 注：在数轴上，数列的每项都相应有点对应它。如果将 x_n 依次在数轴上描出点的位置，限我们能否发现点的位置的变化趋势呢？显然，$\left\{\frac{1}{n}\right\}$ 是无限接近于 0 的；$\{2n\}$ 是无增大的； 分析：观察 $\left\{\frac{n+1}{n}\right\}$ 的情况。 (1) $\frac{n+1}{n}$ 随着 n 的增大，无限制地接近 1，即 $\left \frac{n+1}{n} - 1\right$ 可以任意地小，换言之，当 n 充分大时 $\left \frac{n+1}{n} - 1\right$ 可以小于预先给定的无论多么小的正数 ε。 (2) $\varepsilon = \frac{1}{100} \Rightarrow \left \frac{n+1}{n} - 1\right = \frac{1}{n} < \frac{1}{100} \Rightarrow n > 100$
--	--

	$\left\{\frac{n+1}{n}\right\}$ 从第 101 项开始, 以后的项 $x_{101} = \frac{102}{101}, x_{102} = \frac{103}{102}, \dots$ 都满足不等式 $x_n - 1 < \frac{1}{100}$, 或者说, 当 $n > 100$ 时, 有 $\left \frac{n+1}{n} - 1\right < \frac{1}{100}$。 (3) $\varepsilon = \frac{1}{10000} \Rightarrow \left \frac{n+1}{n} - 1\right = \frac{1}{n} < \frac{1}{10000} \Rightarrow n > 10000$, 即 $\left\{\frac{n+1}{n}\right\}$ 从第 10001 项开始, 以后的项 $x_{10001} = \frac{10002}{10001}, x_{10002} = \frac{10003}{10002}, \dots$ 都满足不等式 $x_n - 1 < \frac{1}{10000}$ 一般地, 不论给定的正数 ε 多么小, 总存在一个正整数 N, 当 $n > N$ 时, 有 $\left \frac{n+1}{n} - 1\right < \varepsilon$。这就充分体现了当 n 越来越大时, $\frac{n+1}{n}$ 无限接近 1 这一事实。这个数“1”称为当 $n \rightarrow \infty$ 时, $\left\{\frac{n+1}{n}\right\}$ 的极限。 (三) 数列极限的定义 定义: 若对 $\forall \varepsilon > 0$ (不论 ε 多么小), 总 $\exists$ 自然数 $N > 0$, 使得当 $n > N$ 时都有 $x_n - a < \varepsilon$ 成立, 这是就称常数 a 是数列 x_n 的极限, 或称数列 x_n 收敛于 a, 记为 $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = a$, 或 $x_n \rightarrow a \ (n \rightarrow \infty)$。如果数列没有极限, 就说数列是发散的。数列 x_n 收敛于 a, 记为 $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = a$, 或 $x_n \rightarrow a \ (n \rightarrow \infty)$。 (四) 数列极限的证明 设 $q < 1$, 证明 $1, q, q^2, \dots, q^{n-1}, \dots$ 的极限为 0, 即 $\lim_{n \rightarrow \infty} q^{n-1} = 0$。 (五) 极限思想的应用 (经济学) 宏观经济学: 从宏观经济体制的两个极端来考虑, 也就是一切生产都由国家控制的计划经济和国家从不干涉的市场经济。 微观经济学: 在经济分析中, 每个行业根据市场上场上的数目; 厂商所生产的产品的差别程度; 单个厂商对市场价格的控制程度; 厂商进入或退出一个行业的难易程度四个方面不同的市场结构特征, 将市场划分为完全竞争市场、垄断市场、垄断竞争市场和寡头市场。其中前两者是市场的极限情况。
分析评价	本案例以刘徽割圆术以及《金刚川》电影的极限思维为引, 融合课程思政特色, 激发学生的学习兴趣, 让学生理解数列极限的同时, 能够发现和分析生活中的极限思想。宏观上, 帮助学生探寻数学知识中蕴含的人生哲理和辩证唯物观, 提升学生的文化自信感和民族自豪感, 激发民族自尊心和爱国主义情感, 培养学生的责任意识, 传承科学家的科学精神。微观上, 让学生不忘初心, 砥砺前行, 精益求精, 无限接近, 方得始终, 具备“水滴石穿”的精神, 坚持才能成功。
评价者	杨存典教授, 商洛学院学生处

案例编号	AME003
案例标题	数列的极限
案例来源	原创
内容简介	我国数学家刘徽“割圆术”，割之弥细，失之弥少，割之又割以至于不可割，则与圆合体而无所失矣。增加学生“四个自信”，对学生进行爱国主义教育，并激发学生努力实现理想、实现自我价值的同时，为实现中国梦而奋斗。培养学生量变到质变，大问题划分小问题解决的辩证思维。培养学生刻苦专研的学习精神。
关键词	割圆术，量变，质变
编写时间	2021-6-29
编著者	刘敏，讲师，商洛学院
素材形式	文字、图片、表格等
育人主题	爱国情怀与科学精神
素材长度	1039
案例正文	1. 刘徽，汉族，山东滨州人，魏晋时期伟大的数学家，中国古典数学理论第一人，刘徽思想敏捷，方法灵活，既提倡推理，又主张直观，他是中国最早明确主张用逻辑推理的方式来论证数学命题的人，它虽然地位低下，但人格高尚，他提出牟合方盖、重差术、割圆术等方法，在中国数学史上作出了极大的贡献，他的杰出代表《九章算术注》和《海岛算经》是中国最宝贵的数学遗产。  图1 刘徽 《九章算术》约成书于东汉之初，共有 246 个问题的解法。在许多方面：如解联立方程，分数四则运算，正负数运算，几何图形的体积面积计算等，都属于世界先进之列，但因解法比较原始，缺乏必要的证明，而刘徽则对此均作了补充证明。在这些证明中，显示了他多方面的创造性的贡献。在开方开不尽的问题中提出“求徽数”的思想，这方法后来与无理数根的近似值的方法一致，他是世界上最早提出十进小数概念的人，并用十进小数来表示无理数的立方根。在代数方面，他正确地提出了正负数的概念及其加减运算的法则；改进了线性方程组的解法。 在几何方面，提出了“割圆术”，即将圆周用内接或外切正多边形穷竭的一种求圆面积和圆周长的方法。他利用割圆术科学地求出了圆周率 $\pi \approx 3.14$ 的结果。刘徽在割圆术中提出的“割之弥细，所失弥

	少，割之又割以至于不可割，则与圆合体而无所失矣”，增加学生“四个自信”，培养学生爱国主义精神，并激发学生努力实现理想、实现自我价值的同时，为实现中国梦而奋斗。通过动画展示过程，培养学生观察和分析能力，培养学生量变到质变，大问题划分小问题解决的辩证思维。培养学生锲而不舍，刻苦专研的学习精神。 《海岛算经》一书中，刘徽精心选编了九个测量问题，这些题目的创造性、复杂性和富有代表性，都在当时为西方所瞩目。 通过极限的起源和发展，了解数学极限的发展历程，体会国内外数学家追求科学道路的艰辛，让学生深刻体会数学的科学性和严谨性的同时，帮助学生形成思维严谨、工作求实的作风。 2.数列的极限中蕴藏着丰富的辩证思想. 数列$\{x_n\}$中的每个x_n都不是a，反映了过程与结果相对立的一面；但取极限的结果又使x_n转化为a，这又反映了过程与结果相统一的一面。可见极限是利用有限来认识无限的一种数学方法，同时也说明极限是有限与无限的对立统一。每个x_n都是极限a的近似值，一般地，n越大近似程度就越好，但无论n多么大，x_n总是a的近似值，只有当n无限变大时，近似值x_n才转化为a，体现了近似与精确的对立统一以及量变与质变的对立统一。培养学生量变到质变，大问题划分小问题解决，对立统一的辩证思维。培养学生锲而不舍，刻苦钻研的学习精神。
分析评价	本案例介绍了刘徽的代表作《九章算术注》和《海岛算经》，它们是中国最宝贵的数学遗产，提升学生的文化自信和传承科学家的科学精神。刘徽的割圆术——数列的极限中蕴藏着丰富的辩证思想。近似与精确、量变与质变的对立统一。培养学生量变到质变，大问题划分小问题解决，对立统一的辩证思维。
评价者	杨存典教授，商洛学院学生处

案例编号	AME004
案例标题	无穷小与无穷大、无穷小的比较
案例来源	原创
内容简介	案例以李白的唐诗中的意境引出无穷小概念，以墨子等人名言中蕴涵的哲理等理解无穷小的性质，让学生深刻体会数学的科学性和严谨性。
关键词	无穷小、无穷大、比较
编写时间	2021-6-27
编著者	黄丽琼讲师，数学与计算机应用学院
素材形式	文字
育人主题	文化自信与人文素养
素材长度	600
案例正文	1.李白的《黄鹤楼送孟浩然之广陵》 从孤帆渐行渐远，直至不见来体会极限为零的变量.高等数学里的无穷小量指的是极限为零的量，唐代诗人李白的“故人西辞黄鹤楼，烟花三月下扬州。孤帆远影碧空尽，唯见长江天际流”，意境深远，亦诗亦画。这首诗淋漓尽致地刻画了无穷小的意境，“帆影”是一个随时间变化而趋于零的量。同学们在深度理解无穷小量这个极重要的数学概念的时候，也许又体会到李白送别友人时的依依不舍之情.多种感官并用会使他们加深对事物的理解与记忆，并感受到数学美所带来的愉悦。 2.墨子说：“有穷，或不容尺有穷；莫不容尺无穷也。” 墨子分析了“有穷”“无穷”的定义。墨子认为宇宙无边无际，时间无始无终，含有无穷大的概念。 3.小和大的辩证关系：不以善小而不为，不以恶小而为之；每个人的生活都是一件件小事组成的，养小德才能成大德。 思政元素： 1.增强“四个自信”，特别是文化自信，中华民族传统文化博大精深.通过实例的引入，让学生在深入理解无穷小量这个重要的数学概念的时候，也许又体会到李白送别友人时的依依不舍之情. 2.不以善小而不为，不以恶小而为之；养小德才能成大德，提高学生道德修养. 3.在等价无穷小替换时需要注意的事项中，让学生深刻体会数学的科学性和严谨性.
分析评价	本案例以李白的唐诗中的意境引出无穷小概念，以墨子等人名言中蕴涵的哲理等理解无穷小的性质，让学生深刻体会数学的科学性和严谨性。
评价者	杨存典教授，商洛学院学生处

案例编号	AME005
案例标题	极限运算法则、两个重要极限
案例来源	原创
内容简介	本案例通过循序渐进的求函数极限例子的引入，进一步培养学生勇于探索的精神。通过对极限运算法则适用范围的分析，培养学生深刻体会数学的科学性和严谨性。从数学极限中的励志公式入手，引导学生发现美好事物中蕴含的数学元素和哲学思想，让美育和智育的相辅相成，培养学生热爱生活热爱学习的积极向上的情感。
关键词	极限、运算法则、重要极限
编写时间	2021-06-27
编著者	黄丽琼讲师，数学与计算机应用学院
素材形式	文字
育人主题	探索精神与科学的精神、辩证思维与数学精神
素材长度	788
案例正文	证明下列函数的极限 $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^2 - 1}{x - 1} = 2$ 证明：注意函数在 $x = 1$ 是没有定义的，但这与函数在该点是否有极限并无关系。 当 $x \neq 1$ 时，$f(x) - A = \left \frac{x^2 - 1}{x - 1} - 2 \right = x - 1 \cdot \forall \varepsilon > 0$，要使 $f(x) - A < \varepsilon$，只要 $x - 1 < \varepsilon$。那么如果要同学们求 $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^2 - 1}{x - 1}$ 呢？ 事实上呢， $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^2 - 1}{x - 1} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{x + 1}{1} = \frac{\lim_{x \rightarrow 1} (x + 1)}{1} = \frac{1 + 1}{1} = 2$ 那么为什么能这么计算呢？这就是我们今天要学习的内容：函数极限的运算法则。 当解题遇到困难和问题时，要抓矛盾的根源，对其进行化解，将未知转化为已知，这样解题能力不断得到提升，生活中也是，遇到困难时，要乐观面对，把它当作是锻炼和强大自己的一个机会，找到问题的突破口，战胜困难，获得进步与提升。 思政元素： 1.通过循序渐进的求函数极限例子的引入，进一步培养学生勇于探索的精神。

	2.通过对极限运算法则适用范围的分析，培养学生深刻体会数学的科学性和严谨性。 数列极限是高等数学的基础理论，它诠释的是永远跳动，无限接近目标的过程.就如同我们的理想，不忘初心，砥砺前行，无限接近，方得始终. 计算 $(1+0.01)^{365}$ 和 $(1-0.01)^{365}$ 的两个结果 37.8 和 0.03，并得出结论：积跬步以至千里，积懒惰以致深渊.每天努力一点点，一年之后将收获巨大的成功；而每天懒惰一点点，将会被人远远地抛在后面.要时刻保持与时俱进，因为那些每天只比你努力一点点的人，最终会将你远远甩开. 思政元素：1.让学生巩固极限概念所蕴含的辩证法哲学思想：“化复杂为简单”，“无限和有限、近似和准确、量变和质变”等范畴的对立统一，“变”与“不变”不是绝对的，在一定条件下，矛盾双方可以相互转化. 2.本着“数学来源于实践、数学服务于实践”的理念，通过实际问题的引入和分析，让学生感受数学知识的重要性，体会数学的理性与严谨，激发学生学习兴趣. 3.从生活素材入手，引导学生发现美好事物中蕴含的数学元素和哲学思想，让美育和智育的相辅相成，培养学生热爱生活热爱学习的积极向上的情感.
分析评价	本案例通过循序渐进的求函数极限例子的引入，进一步培养学生勇于探索的精神。通过对极限运算法则适用范围的分析，培养学生深刻体会数学的科学性和严谨性。从数学极限中的励志公式入手，引导学生发现美好事物中蕴含的数学元素和哲学思想，让美育和智育的相辅相成，培养学生热爱生活热爱学习的积极向上的情感。
评价者	杨存典教授，商洛学院学生处

案例编号	AME006
案例标题	函数的连续性与间断点
案例来源	原创
内容简介	本案例讨论函数的连续性与间断点的概念与性质。以王夫之的名言、冯如和他的飞机之梦为思政元素,培养学生人文素养和辩证思维的同时,让学生深刻体会数学的科学性和严谨性。
关键词	函数, 连续性, 间断点
编写时间	2021-06-29
编著者	刘敏, 讲师, 商洛学院
素材形式	文字、图片、表格等
育人主题	人文素养与科学精神
素材长度	895
案例正文	1. 人贵有自尊之心, 自立之举, 自强之志. 立志而圣则圣, 立志而贤则贤. 志不立, 天下无可成之事. ---王夫之 王夫之, 湖南衡阳人, 是明末清初的思想家, 与顾炎武、黄宗羲并称明清之际三大思想家, 其著有《周易外传》、《黄书》、《尚书引义》、《永历实录》、《春秋世论》、《读通鉴论》等, 其哲学思想主要为: 反禁欲主义, 提倡不能离开人欲空谈天理; 均天下, 反专制; 气一元论; 心物之辩等, 其名言启示同学们坚定理想信念, 持之以恒锤炼自己, 使自己成为社会主义接班人, 引出函数连续与间断定义, 基于连续与间断的辩证关系, 确定函数连续性的定义, 培养学生人文素养和辩证思维的同时, 让学生深刻体会数学的科学性和严谨性, 帮助学生形成良好的学习习惯、思维严谨、工作求实的作风; 培养学生持之以恒、坚持不懈的品质精神。以古人名言名句唤起青年学子的爱国热情。 2. 冯如和他的飞机之梦: 冯如是我国杰出的科学家、第一个飞机制造专家和飞行家. 他出生于农民家庭, 12 岁开始旅美生活. 美国的工业繁荣使他认识到, 中国要富强, 就必须要有先进工业. 他省吃俭用, 大量购买机械学书籍刻苦自学, 并于几年后开始了发明创造. 1904

	年，俄日帝国主义为争夺中国东北三省爆发战争，给中国人民带来深重灾难.冯如闻后立志为祖国制造飞机，并发誓：“苟无成，毋宁死.”1906 年冯如在美国旧金山，向华侨募集了 1000 美元资金，与 9 位华侨青年助手，开始了飞机的研制工作.面对一次次失败和各方面阻力，冯如毅然宣布“飞机不成、誓不回国”.在伟大理想的激励下，经过艰苦设计、研究实践，冯如终于在 1909 年 9 月 21 日驾驶自制的飞机翱翔在奥克兰的上空.它震惊了西方世界，在中国航空史上写下了光辉的一页.之后，冯如谢绝美国的高薪延聘，回国创办了飞机制造公司，致力于祖国的航空事业.直至 1912 年 8 月 15 日，于一次飞机试飞中因故遇难，年仅 29 岁. 讨论：同学们根据冯如的故事，说一说理想和事业成功之间的关系是什么？ 结合学生现状和当今形势，鼓励学生努力实现理想.而实现理想是一个长期的过程，需有持之以恒的恒心、坚韧不拔的毅力、坚定不移的自信心，需具备持之以恒的意志品质.
分析评价	本案例讨论函数的连续性与间断点的概念与性质。以王夫之的名言、冯如和他的飞机之梦为思政元素，培养学生人文素养和辩证思维的同时，让学生深刻体会数学的科学性和严谨性。
评价者	杨存典教授，商洛学院学生处

案例编号	AME007
案例标题	连续函数的运算与初等函数的连续性、闭区间上连续函数的性质
案例来源	原创
内容简介	本案例结合生活实例，基于连续与间断的辩证关系，确定函数连续性的定义，培养学生人文素养和辩证思维的同时，让学生深刻体会数学的科学性和严谨性。
关键词	连续函数、运算、闭区间
编写时间	2021-06-27
编著者	黄丽琼讲师，数学与计算机应用学院
素材形式	文字
育人主题	人文精神与坚持品质、中国精神
素材长度	965
案例正文	1. “中华者，中国也。亲被王教，自属中国，衣冠威仪，习俗孝悌，居身礼仪，故谓之中华。” ——南宋贯冶子解释《唐律疏议》 2. 善心的传递 A城市：市政府为了方便市民，在大街上投放了八百辆自行车。这些自行车没有上锁，任何人都可以骑，骑到目的地就地摆放。一年以后，市政府重新清点自行车，发现八百辆自行车一辆不少，有的还被翻修一新。 B城市：一家公司进行公益活动，在全市交通岗亭投放了三万把雨伞，供市民在遭遇大雨时无偿使用。条件只有一个，即市民用完之后将雨伞在方便的时候交还给市内的任何一个岗亭。一个月以后，这家公司重新清点雨伞，发现全市岗亭回收的雨伞仅有六把。 思考：这两个案例说明了什么？ 思政元素： 1. 结合生活实例，基于连续与间断的辩证关系，确定函数连续性的定义，培养学生人文素养和辩证思维的同时，让学生深刻体会数学的科学性和严谨性，帮助学生形成良好的学习习惯、思维严谨、工作求实的作风；培养学生持之以恒、坚持不懈的品质精神。 2. 结合学生现状和当今形势，鼓励学生努力实现理想。而

	实现理想是一个长期的过程，需有持之以恒的恒心、坚韧不拔的毅力、坚定不移的自信心，需具备持之以恒的意志品质。 贵在有恒，成在有恒——非不能也，为不为也。 流沙河的《理想》 理想是石，敲出星星之火； 理想是火，点燃熄灭的灯； 理想是灯，照亮夜行的路； 理想是路，引你走到黎明。 饥寒的年代里，理想是温饱； 温饱的年代里，理想是文明。 离乱的年代里，理想是安定； 安定的年代里，理想是繁荣。 克雷洛夫说：“现实是此岸，理想是彼岸，中间隔着湍急的河流，行动则是架在水上的桥梁”。那么如何去实现自己的理想呢？ 思政元素： 1.结合生活实例，基于连续函数的几个重要性质，确定函数零点定理和介值定理，培养学生人文素养的同时，让学生深刻体会数学的科学性和严谨性，帮助学生形成良好的学习习惯、思维严谨、工作求实的作风；培养学生持之以恒、坚持不懈的品质精神。 2.结合学生现状和当今形势，鼓励学生努力提升自我价值。而在实践中创造有价值的人生，需走与人民群众相结合的道路，走与社会实践相结合的道路；需具备持之以恒的意志品质。
分析评价	本案例结合生活实例，基于连续与间断的辩证关系，确定函数连续性的定义，培养学生人文素养和辩证思维的同时，让学生深刻体会数学的科学性和严谨性。
评价者	杨存典教授，商洛学院学生处

案例编号	AME008		
案例标题	导数的定义		
案例来源	购买		
内容简介	在讲授知识的同时，通过介绍数学历史，培养学生严谨的科学精神；融入“高铁精神”，体现了以爱国主义为核心的民族精神和以自主创新为核心的时代精神，借此培养学生的自信心和自豪感。		
关键词	导数、定义、极限		
编写时间	2022-03-01		
编著者	余亚辉等，洛阳理工学院		
素材形式	文字		
育人主题	培养学生严谨的科学精神；融入“高铁精神”，体现了以爱国主义为核心的民族精神和以自主创新为核心的时代精神，借此培养学生的自信心和自豪感。		
素材长度	案例正文中字符的数目		
案例正文	理论知识	思政元素	育人目标
	一、结合实际，情景导入 研究函数不仅要了解函数如何随自变量变化而变化，还需要了解当自变量发生一定改变时，因变量相应改变了多少及其随自变量变化的快慢程度，这就是微分及导数研究的问题。 导数和微分不仅是微分学的两个基本概念，也是研究函数性质的基本方法。 思政元素 微积分发展史。 例如，对 $y = x^2$ 求导数，根据牛顿的计算方法有 $y + \Delta y = (x + \Delta x)^2 \quad (1)$ 将 $y = x^2$ 代入上式可得 $\Delta y = 2x\Delta x + (\Delta x)^2 \quad (2)$ $\frac{\Delta y}{\Delta x} = 2x + \Delta x \quad (3)$ $\frac{\Delta y}{\Delta x} = 2x \quad (4)$	① 介绍牛顿和莱布尼茨创立微积分他们没有定义导数，导致了导数概念的混淆不清，最终引发了第二次数学危机。	① 通过介绍数学历史，培养学生严谨的科学精神。
	引例 1 变速直线运动的瞬时速度 设一质点在坐标轴上做非匀速直线运动，时刻 t 质点的坐标为 s，s 是 t 的函数，	② 以我国高铁车厢内	②“高铁精神”展现在世

案例正文	$s = f(t)$，求动点在时刻 t_0 的瞬时速度。 考虑比值 $\frac{s-s_0}{t-t_0} = \frac{f(t)-f(t_0)}{t-t_0}$，这个比值是动点在时间间隔 $t-t_0$ 内的平均速度. 令 $t-t_0 \rightarrow 0$，得动点在时刻 t_0 的瞬时速度 v，即 $v = \lim_{t \rightarrow t_0} \frac{f(t)-f(t_0)}{t-t_0}$ 思政元素 中国高铁精神. 引例 2 切线问题:割线的极限位置一切线 设有曲线 C 及 C 上的一点 M，在点 M 外另取 C 上一点 N，作割线 MN. 当点 N 沿曲线 C 趋于点 M 时，如果割线 MN 绕点 M 旋转而趋于极限位置 MT，直线 MT 就称为曲线 C 在点 M 处的切线. 设 $M(x_0, y_0)$，$N(x, y)$，于是割线 MN 的斜率为 $\tan \varphi = \frac{y-y_0}{x-x_0} = \frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}$ 让 $N \rightarrow M$ 取极限，得切线 MT 的斜率为 $k = \tan \alpha = \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}$ 二、归纳总结，形成概念 导数的定义 函数在一点处的导数与导函数 从上面所讨论的两个问题看出，非匀速直线运动的速度和切线的斜率都归结为如下的极限 $\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}$ 即 $\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} \text{ 或 } \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)}{\Delta x}$	速度显示屏为切入点，引人如何求瞬时速度问题. 介绍“高铁精神”，即“科学求实、相容并蓄；自主创新、赶超一流；忠诚祖国、拼搏奉献.”	人面前的是——一道靓丽的风景线,让世界惊叹! 集中体现了以爱国主义为核心的民族精神和以自主创新为核心的时代精神,借此培养学生的自信心和自豪感. ③ 通过内涵与形式的分析,使学生更理解导数的定
------	--	--	---

案例正文	定义 1 设函数 $y = f(x)$ 在点 x_0 的某个邻域内有定义, 当自变量 x 在 x_0 处取得增量 Δx (点 $x_0 + \Delta x$ 仍在该邻域内) 时, 相应地, 函数 y 取得增量 $\Delta y = f(x + \Delta x) - f(x_0)$. 如果 Δy 与 Δx 之比当 $\Delta x \rightarrow 0$ 时的极限存在, 则称函数 $y = f(x)$ 在点 x_0 处可导, 并称这个极限为函数 $y = f(x)$ 在点 x_0 处的导数, 记为 $f'(x_0)$, 即 $f'(x_0) = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)}{\Delta x}$ 也可记为 $y' _{x=x_0}$, $\left. \frac{dy}{dx} \right _{x=x_0}$ 或 $\left. \frac{df(x)}{dx} \right _{x=x_0}$. 导数定义的多种表达式 $\begin{aligned} f'(x_0) &= \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)}{\Delta x} \\ &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h} \\ &= \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} \end{aligned}$ 思政元素 导数定义的关键为函数在一点处的增量与相应自变量的增量之比的极限, 与增量所采用的表现形式无关, 即导数的定义式可以表现为多种形式, 但其本质是一样的. 三、尝试探究, 深化概念 1 关于导数的说明 (1) 在实际中, 需要讨论各种具有不同意义的变量的变化“快慢”问题, 在数学上就是所谓函数的变化率问题. 导数概念就是函数变化率这一概念的精确描述. 思政元素 1669 年牛顿在他的《运用无穷多项方程	以表现为多种形式, 教育学生看待事物不能只看表象, 更要分析概念所反映事物的本质, 内涵决定形式, 而不是形式决定内涵. ④ 正像这本书一样, 牛顿一生中的所有研究成果和发明创造都是他亲身经过无数次理论验证, 确凿无疑才发表的. 教育学生戒骄戒躁, 学习牛顿严谨的治学态度, 刻苦钻研、精益求精的科学精神. ④ 这本书是反映牛顿创立微积分的重要基础. 但这本书 1711 年才出版. 事实上, 早在 1666 年他就完成该书的初稿, 之后不断修改完善, 还提交给他的导师巴罗指导.
-------------	---	---

案例正文	的分析学》中给出了求一个变量对另一个变量的瞬时变化率的普遍方法。 (2) 如果极限 $\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)}{\Delta x}$ 不存在, 就说函数 $y = f(x)$ 点 x_0 处不可导. (3) 函数 $y = f(x)$ 在开区间 I 内的每点处都可导, 就称函数 $f(x)$ 在开区间 I 内可导, 这时, 对于任一 $x \in I$, 都对应着 $f(x)$ 的一个确定的导数值. 这样就构成了一个新的函数, 称为 $f(x)$ 的导函数, 记作 $y', f'(x), \frac{dy}{dx},$ 或 $\frac{df(x)}{dx}$ 即 $y' = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f(x + \Delta x) - f(x)}{\Delta x} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x + h) - f(x)}{h}$ $f'(x_0)$ 与 $f'(x)$ 之间的关系: $f'(x_0) = f'(x) _{x=x_0}$ 导函数 $f'(x)$ 简称导数, 而 $f'(x_0)$ 是 $f(x)$ 在 x_0 处的导数或导数 $f'(x)$ 在 x_0 处的值. 定义 2 (左右导数) 如果极限 $\lim_{h \rightarrow 0^-} \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h}$ 存在, 则称此极限值为函数在 x_0 的左导数. 记为 $f'_-(x_0) = \lim_{h \rightarrow 0^-} \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h}$ 如果极限 $\lim_{h \rightarrow 0^+} \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h}$ 存在, 则称此极限值为函数在 x_0 的右导数. 记为 $f'_+(x_0) = \lim_{h \rightarrow 0^+} \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h}$ 函数 $f(x)$ 在 x_0 处可导 $\Leftrightarrow$ 左导数 $f'_-(x_0)$	⑤ 如果 $f(x)$ 可导左、右导数都存在且相等. 由此, 我们可以想到成语“左右逢源” ⑥ 数学上常用简单的对象来刻画复杂的事物, 这里用的曲线上的切线近似代替附近的曲线, 体现了微积分的重要思想——以直代曲 ⑦ 连续与可导借助极	⑤ 赏识广博, 才能应付裕如. 教育学生应该博览群书, 涉猎广泛, 见多识广, 方才能游刃有余. 不学无术或者知识面单一, 是不行的. ⑥ 以直代曲体现了“近似与精确”的哲学原理, 为教师和学生提供了广阔的思维空间, 换个角度和方法
-------------	--	---	--

案例正文	和右导数 $f'_+(x_0)$ 都存在且相等. 如果 $f(x)$ 在开区间 (a, b) 内可导, 且 $f'_-(b)$ 和 $f'_+(a)$ 都存在, 就说 $f(x)$ 在闭区间 $[a, b]$ 上可导. 思政元素 先秦·孟轲《孟子·离娄下》:“资之深, 则取之左右逢其源.” 2 导数的几何意义、物理意义 几何意义: $f'(x_0)$ 表示曲线 $y=f(x)$ 在点 $M(x_0, f(x_0))$ 处的切线的斜率, 即 切线方程为 $y-y_0=f'(x_0)(x-x_0)$ 法线方程为 $y-y_0=-\frac{1}{f'(x_0)}(x-x_0)(f'(x_0)\neq 0)$ 特别是, 若 $f'(x_0)=\infty$, 则切线方程为 $x=x_0$, 法线方程为 $y=y_0$; 反之, 若 $f'(x_0)=0$, 则切线方程为 $y=y_0$, 法线方程为 $x=x_0$. 思政元素 微积分重要思想——以直代曲. 物理意义: 非均匀变化量的瞬时变化率. 例如变速直线运动的瞬时速度: $v(t)=\lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta s}{\Delta t} = \frac{ds}{dt}$ (位移对时间的导数). 例如交流电路电流强度: $i(t)=\lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta q}{\Delta t} = \frac{dq}{dt}$ (电量对时间的导数). 3 可导与连续的关系 定理: 可导一定连续, 连续不一定可导. 证明略. 思政元素 “变”与“不变”的辩证关系. 四、巩固练习, 拓展应用	限建立了关系, 体现了“变”与“不变”的辩证关系 ⑧ 中共中央在“十四五”规划和 2035 远景目标建议中指出: “我们现在处在新发展阶段、要有新发展理念、要构建新发展格局是以习	去思考问题, 必将柳暗花明. ⑦ 培养学生的辩证思维习惯, 潜移默化中强调唯物辩证法在认识客观世界中的重要性. ⑧ 通过导数的定义, 我们可以领悟到要善于发现各种变量之间的变化关系, 从而做出具
------	---	---	--

案例正文	4 由定义求导数步骤 (1) 求增量 $\Delta y = f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)$; (2) 计算比值 $\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)}{\Delta x}$; (3) 求极限 $f'(x_0) = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta y}{\Delta x}$. 例 1 求函数 $f(x) = C$ (C 为常数) 的导数. 解 $f'(x) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{C - C}{h} = 0 . \text{ 即 } C' = 0$ 例 2 求 $f(x) = \frac{1}{x}$ 的导数及 $f'(1)$. 解 $\begin{aligned} f'(x) &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\frac{1}{x+h} - \frac{1}{x}}{h} \\ &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{-h}{h(x+h)x} = -\lim_{h \rightarrow 0} \frac{1}{(x+h)x} = -\frac{1}{x^2} \end{aligned}$ $f'(1) = f'(x) _{x=1} = -1$ 例 3 求等边双曲线 $y = \frac{1}{x}$ 在点 $(\frac{1}{2}, 2)$ 处的切线的斜率, 并写出该点处的切线方程和法线方程 解 $y' = -\frac{1}{x^2}$, 所求切线及法线的斜率分别为 $k_1 = \left(-\frac{1}{x^2}\right)\bigg _{x=\frac{1}{2}} = -4, k_2 = -\frac{1}{k_1} = \frac{1}{4}$ 所求切线方程为 $y - 2 = -4(x - \frac{1}{2})$, 即 $4x + y - 4 = 0$. 所求法线方程为 $y - 2 = \frac{1}{4}(x - \frac{1}{2})$, 即 $2x - 8y + 15 = 0$. 案例 1 【飞机降落曲线的设计问题】 在研究飞机的自动着陆系统时, 技术人员	近平总书记为核心的党中央, 根据国内外发展的形势做出的最新判断, 形势的发展就是形势发生了变化, 是一个综合参量的增量, 我们要根据变化的快慢做出判断, 适应形势的发展, 构建新发展阶段的新理念和新的格局.	体的合适的抉择. 领会导数定义的内涵, 用导数的思想来指导“导”我们的学习、工作和生活.
------	--	--	---

	需要分析飞机的降落曲线, 根据经验, 一架水平飞行的飞机, 其降落曲线是一条三次曲线. 已知飞机的飞行高度为 h, 飞机的着陆点为原点 O, 且在整个降落过程中, 飞机的水平速度始终保持为常数 v, 出于安全考虑, 飞机垂直加速度的最大绝对值不得超过 $g/10$, 其中 g 为重力加速度. (1) 若飞机从 $x = x_0$ 处开始降落, 试确定飞机的降落曲线; (2) 求开始下降点 x 所能允许的最小值. 案例 2【侦察机上摄像机转动的角速度问题】 侦察机主要依靠其高速性能和加装电子对抗装备来提高其生存能力. 通常装有航空照相机、前视或侧视雷达和电视、红外线侦察设备, 有的还装有实时情报处理设备和传递装置, 以及目前最先进的合成孔径雷达. 摄影机通过调整摄影角度来实现目标锁定, 找出摄影角度与侦察机离目标的水平距离的关系, 借助相关变化率知识, 求导可得角速度. 已知侦察机在离地面 2km 的高度, 以 200km/h 的速度飞到某地面目标的上空, 以便进行航空摄影, 试求该侦察机至该目标上方时摄像机转动的角速度.		
分析评价	本案例在讲授知识的同时, 通过介绍数学历史, 培养学生严谨的科学精神; 融入“高铁精神”, 体现了以爱国主义为核心的民族精神和以自主创新为核心的时代精神, 借此培养学生的自信心和自豪感。		
评价者	杨存典教授, 商洛学院学生处		

案例编号	AME009
案例标题	导数的概念
案例来源	原创
内容简介	由求变速运动的瞬时速度和求曲线上一点处的切线这两类实际问题的现实原型在数学上都可归结为函数相对于自变量变化而变化的快慢程度, 即所谓函数的变化率问题. 由此给出函数导数的定义。
关键词	速度, 切线, 变化率, 导数
编写时间	2021-6-29
编著者	刘敏, 讲师, 商洛学院
素材形式	文字、图片、表格等
育人主题	科学精神
素材长度	912
案例正文	从 15 世纪初文艺复兴时期起, 欧洲的工业、农业、航海事业与商贾贸易得到大规模的发展, 形成了一个新的经济时代. 而十六世纪的欧洲, 正处在资本主义萌芽时期, 生产力得到了很大的发展. 生产实践的发展对自然科学提出了新的课题, 迫切要求力学、天文学等基础科学的发展, 而这些学科都是深刻依赖于数学的, 因而也推动了数学的发展. 在各类学科对数学提出的种种要求中, 下列两类问题导致了微分学的产生: 1. 求变速运动的瞬时速度; 设一质点在坐标轴上作非匀速运动, 时刻 t 质点的坐标为 s, s 是 t 的函数: $s=f(t)$, 求动点在时刻 t_0 的速度. 考虑比值 $\frac{s-s_0}{t-t_0} = \frac{f(t)-f(t_0)}{t-t_0},$ 这个比值可认为是动点在时间间隔 $t-t_0$ 内的平均速度. 如果时间间隔选较短, 这个比值在实践中也可用来说明动点在时刻 t_0 的速度. 但这样做是不精确的, 更确切地应当这样: 令 $t-t_0 \rightarrow 0$, 取比值 $\frac{f(t)-f(t_0)}{t-t_0}$ 的极限, 如果这个极限存在, 设为 v, 即 $v = \lim_{t \rightarrow t_0} \frac{f(t)-f(t_0)}{t-t_0},$

	这时就把这个极限值 v 称为动点在时刻 t_0 的速度. 2. 求曲线上一点处的切线. 设有曲线 C 及 C 上的一点 M, 在点 M 外另取 C 上一点 N, 作割线 MN. 当点 N 沿曲线 C 趋于点 M 时, 如果割线 MN 绕点 M 旋转而趋于极限位置 MT, 直线 MT 就称为曲线 C 有点 M 处的切线. 设曲线 C 就是函数 $y=f(x)$ 的图形. 现在要确定曲线在点 $M(x_0, y_0)(y_0=f(x_0))$ 处的切线, 只要定出切线的斜率就行了. 为此, 在点 M 外另取 C 上一点 $N(x, y)$, 于是割线 MN 的斜率为 $\tan\varphi = \frac{y-y_0}{x-x_0} = \frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0},$ 当点 N 沿曲线 C 趋于点 M 时, $x \rightarrow x_0$. 如果当 $x \rightarrow x_0$ 时, 上式的极限存在, 设为 k, 即 $k = \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}$ 存在, 则此极限 k 是割线斜率的极限, 也就是切线的斜率. 这里 于是, 通过点 $M(x_0, f(x_0))$ 且以 k 为斜率的直线 MT 便是曲线 C 在点 M 处的切线. 这两类实际问题的现实原型在数学上都可归结为函数相对于自变量变化而变化的快慢程度, 即所谓函数的变化率问题. 牛顿从第一个问题出发, 莱布尼茨从第二个问题出发, 分别给出了导数的概念.
分析评价	由求变速运动的瞬时速度和求曲线上一点处的切线这两类实际问题的现实原型在数学上都可归结为函数相对于自变量变化而变化的快慢程度, 即所谓函数的变化率问题, 体现出统一性。
评价者	杨存典教授, 商洛学院学生处

案例编号	AME010
案例标题	高阶导数
案例来源	购买
内容简介	介绍在动力学中的另外两个物理量急动度、痊挛度, 让学生了解研究高阶导数不仅是理论上的需要在实际中也有所应用, 同时利用前沿知识, 鼓励学生探索。在教学活动中创设真实问题情境, 使学生主动参与课堂, 才能真正培养学生的高阶思维能力, 让学生学会思考, 学会质疑, 发展学生的科学素养。
关键词	高阶导数
编写时间	2022-3-1
编著者	余亚辉等, 洛阳理工学院
素材形式	文字等
育人主题	高阶思维能力, 让学生学会思考, 学会质疑, 发展学生的科学素养。
素材长度	1310
案例正文	一、结合实际, 情景导入 函数 $y = f(x)$ 的导数 $y' = f'(x)$ 仍然是 x 的函数, 从理论上讲, 我们自然会想对导函数可以继续计算导数, 那么这样得到的结果有什么实际的意义吗? 本节我们将讨论如何计算函数的高阶导数, 并推导出一些函数的 n 阶导数的计算公式, 为后面学习泰勒公式打下基础。 在中学物理中我们学习过速度和加速度的概念, 那么有同学听到过急动度和痊挛度的概念吗? 引例 变速直线运动 $s = s(t)$ 速度 $v = \frac{ds}{dt}$, 即 $v = s'$ 加速度 $a = \frac{dv}{dt} = \frac{d}{dt}(\frac{ds}{dt})$ 即 $a = (s')'$ 急动度 $j = \frac{da}{dt} = \frac{d}{dt}(\frac{dv}{dt}) = \frac{d}{dt}(\frac{d}{dt}(\frac{ds}{dt}))$ 即 $j = ((s')')'$ 痊挛度 $h = \frac{dj}{dt} = \frac{d}{dt}(\frac{da}{dt}) = \frac{d}{dt}(\frac{d}{dt}(\frac{dv}{dt})) = \frac{d}{dt}(\frac{d}{dt}(\frac{d}{dt}(\frac{ds}{dt})))$ 即 $h = (((s')')')')$ 加速度随时间的变化率称为急动度。当物体受到恒定加速度, 表明物体会受到稳恒力, 如果这个力突然改变, 人们将感到不舒服, 甚至是疼痛, 如当小汽车尾部遭到撞击时, 加速度会突然改变。汽车工程师采用急动度作为评判乘客不舒服程度的指标。人们可以测量位置, 看见速度, 感觉加速度, 厌恶急动度。

痉率度是急动度相对于时间的导数，即位矢对时间的四阶导数，也有人把它称为加加加速度。在前沿理论，如混沌理论、超弦理论中有所涉及。

二、归纳总结，形成概念

高阶导数的概念

一般地，函数 $y = f(x)$ 的导数 $y' = f'(x)$ 仍然是 x 的函数，我们把 $y' = f'(x)$ 的导数叫作 $y = f(x)$ 的二阶导数，记作

$$f''(x), y'', \frac{d^2 y}{dx^2} \text{ 或 } \frac{d^2 f(x)}{x^2}$$

相应地，把 $f'(x)$ 称为函数 $y = f(x)$ 的一阶导数，所以一阶导数的导数叫二阶导数。

类似地，二阶导数的导数称为三阶导数，三阶导数的导数称为四阶导数， $\dots$ ， $n-1$ 阶导数的导数称为 n 阶导数，分别记作：

$$f'''(x), y''', \frac{d^3 y}{dx^3}; f^{(4)}(x), y^{(4)}, \frac{d^4 y}{dx^4}; \dots; f^{(n)}(x), y^{(n)}, \frac{d^n y}{dx^n} \text{ 或 } \frac{d^n f(x)}{dx^n}$$

如果函数 $f(x)$ 在点 x 处具有 n 阶导数，那么函数 $f(x)$ 在点 x 的某一邻域内必定具有一切低于 n 阶的导数。二阶及二阶以上的导数统称为高阶导数。

思政元素

高阶思维。

三、尝试探究，深化概念

高阶导数的运算法则

设函数 u 和 v 具有 n 阶导数，则

$$(1) (u \pm v)^{(n)} = u^{(n)} \pm v^{(n)}$$

$$(2) (Cu)^{(n)} = Cu^{(n)}$$

$$\begin{aligned} (3) (uv)^{(n)} &= u^{(n)}v + nu^{(n-1)}v' + \frac{n(n-1)}{2!}u^{(n-2)}v'' + \\ &\quad \frac{n(n-1)\dots(n-k+1)}{k!}u^{(n-k)}v^{(k)} + \dots + uv^{(n)} \\ &= \sum_{k=0}^n C_n^k u^{(n-k)}v^{(k)} \text{ (莱布尼茨公式)} \end{aligned}$$

思政元素

莱布尼茨与中国文化：17 世纪德国的卓越哲学家、数学家莱布尼茨（1646-1716），生活的年代（清顺治三年至康熙五十五年）正值中

国清朝统治时期的康熙时代, 那时有一批欧洲传教士在中国传教, 他们把西方的一些科学知识带入中国, 也陆续把中国的许多传统文化传入西方, 莱布尼茨对中国文化的浓厚兴趣持续于他的一生, 他数十年如一日, 坚持不懈地开展中西文化交流。

四、巩固练习, 拓展应用

例题

例 1 设 $y = \sin x$ 求 $y^{(n)}$ 。

解 $y' = \cos x = \sin(x + \frac{\pi}{2})$

$$y'' = \cos(x + \frac{\pi}{2}) = \sin(x + \frac{\pi}{2} + \frac{\pi}{2}) = \sin(x + 2 \cdot \frac{\pi}{2})$$

$$y''' = \cos(x + 2 \cdot \frac{\pi}{2}) = \sin(x + 3 \cdot \frac{\pi}{2})$$

...

$$y^{(n)} = \sin(x + n \cdot \frac{\pi}{2}), \text{ 即 } (\sin x)^{(n)} = \sin(x + n \cdot \frac{\pi}{2}).$$

用类似方法, 可得 $(\cos x)^{(n)} = \cos(x + n \cdot \frac{\pi}{2})$.

例 2 求函数 $y = x^n (n \in \mathbb{N}_+)$ 的 n 阶导数。

解 $y' = (x^n)' = nx^{n-1};$

$$y'' = (nx^{n-1})' = n(n-1)x^{n-2};$$

$$y''' = (n(n-1)x^{n-2})' = n(n-1)(n-2)x^{n-3};$$

...;

$$y^{(n-1)} = n(n-1)(n-2) \cdots 2x; \quad y^{(n)} = n(n-1)(n-2) \cdots 2 \cdot 1 = n!;$$

$$y^{(n+1)} = y^{(n+2)} = \cdots = 0.$$

例 3 求函数 $y = e^x$ 的 n 阶导数。

解

$$y' = (e^x)' = e^x;$$

$$y'' = (e^x)'' = e^x;$$

$$y''' = (e^x)''' = e^x;$$

...

$$y^{(n)} = (e^x)^{(n)} = e^x \quad (n \in \mathbb{N}).$$

案例【高阶导数在分离重力叠加异常中的研究及应用】

随着物探找矿的推进, 找矿的难度越来越大, 如何从复杂的叠加的弱信息中将我们需要的有用信息提取出来, 是一件亟待解决的问题. 可以通过模拟、分析、总结重力高阶导数在分离叠加中的异常,

	应用到实际资料的处理中,利用重力高阶导数不同半径的交点比较准确地确定出矿体的边界位置,同时与钻孔验证的结果基本一致,目前已经取得了良好的应用效果.
分析评价	本案例介绍在动力学中的另外两个物理量急动度、痉挛度,让学生了解研究高阶导数不仅是理论上的需要在实际中也有所应用,同时利用前沿知识,鼓励学生探索。在教学活动中创设真实问题情境,使学生主动参与课堂,才能真正培养学生的高阶思维能力,让学生学会思考,学会质疑,发展学生的科学素养。
评价者	杨存典教授,商洛学院学生处

案例编号	AME011
案例标题	高阶导数
案例来源	原创
内容简介	高阶导数是高等数学与实际问题的一个重要桥梁，它为解决生活中的一些实际问题提供了重要方法，正所谓理论来源于生活又服务于生活。
关键词	导数；高阶导数
编写时间	2021-3-1
编著者	黄丽琼讲师，数学与计算机应用学院
素材形式	文字等
育人主题	科学精神，爱国情怀，探索精神
素材长度	1434
	1. 莱布尼茨是最早接触中华文化的欧洲人之一，曾经从一些曾经前往中国传教的教士那里接触到中国文化，之前应该从马可·波罗引起的东方热留下的影响中也了解过中国文化。法国汉学大师若阿基姆·布韦(Joachim Bouvet, 汉名白晋, 1662—1732年)向莱布尼茨介绍了《周易》和八卦的系统。在莱布尼茨眼中，“阴”与“阳”基本上就是他的二进制的中国版。他曾断言：“二进制乃是具有世界普遍性的、最完美的逻辑语言”。如今在德国图林根，著名的郭塔王宫图书馆(Schlossbibliothek zu Gotha)内仍保存一份莱氏的手稿，标题写着“1与0，一切数字的神奇渊源。” 2. 其手稿标题全文是：《1与0，一切数字的神奇渊源。……这是造物的秘密美妙的典范，因为，一切无非都来自上帝。》，而且莱布尼茨自己写给若阿基姆·布韦的信中莱布尼茨写到的：“第一天的伊始是1，也就是上帝。第二天的伊始是2，……到了第七天，一切都有了。所以，这最后的一天也是完美的。因为，此时世间的一切已经被创造出来了。因此它被写作‘7’，也就是‘111’（二进制中的111等于十进制的7），而且不包含0。只有当我们仅仅用0和1来表达这个数字时，才能理解，为什么第七天才完美，为什么7是神圣的数字。特别值得注意的是它（第七天）的特征（写作二进制的111）与三位一体的关联。 3. 郭书春在《古代世界数学泰斗刘徽》一书461页中称：“中国有所谓《周易》创造了二进制的说法，至于莱布尼兹受《周易》八卦的影响创造二进制并用于计算机的神话，更是广为流传。事实是，莱布尼兹先发明了二进制，后来才看到传教士带回的宋代学者重新编排的《周易》八卦，并发现八卦可以用他的二进制来解释。”以此为由，认为并不是莱布尼茨看到阴阳八卦才发明二进制。梁宗巨著《数学历史典故》（1995年出版）一书14~18页对这一历史公案亦有此说。 4. 胡阳、李长铎在《莱布尼茨发明二进制前没有见过先天图吗——对欧洲现存17世纪中西交流文献的考证》通过对欧洲现存17世纪中西交流文献的研究考证，否定了莱布尼茨在发明

	二进制以后才见到先天图的说法. 先天图在莱布尼茨发明二进制之前, 已被斯比塞尔称之为二进制. 5. 有关莱布尼茨二进制与中国古代典籍《易经》关系问题的讨论. 涉及如何看待近代中西文化的各自特质以及它们之间的相互作用问题. 虽然二进制只是一种算术记数法和计数法, 但它实际上是特定文化(包括数学、语言、符号、逻辑和哲学等)的产物. 现有观点中的一个明显不足是把与二进制相关的概念、理论(原理、符号等)的形成与发展看作是单因素的、一次性完成的结果, 又把二进制与《易经》哲学和卦图的相互作用关系看作是“全或无”的关系, 从而忽视了概念、理论的形成和变化过程, 也容易导致两种极端的判断. 因此, 立足于近代中西文化交流的大背景, 从概念与认知分析入手, 能够把莱布尼茨二进制思想的形成过程置于近代中西文化交流所编织的概念网络系统之中, 进而梳理出莱布尼茨在秉承西方近代数学概念的同时, 如何通过获取和吸纳《易经》概念资源而实现概念的创造性转换的脉络. 我们看到, 除了莱布尼茨个人的独创性的伟大贡献外, 近代意义上的二进制实际上是“中西合璧”的产物. 思政元素: 1. 高阶导数是高等数学与实际问题的一个重要桥梁, 它为解决生活中的一些实际问题提供了重要方法, 正所谓理论来源于生活又服务于生活. 期待我们新一代大学生既能用科学的理论知识武装好自己的头脑, 又能把这些科学的理论知识转化为生产力, 造福我们的祖国, 为中华民族的伟大复兴贡献自己的一份力量. 2. 莱布尼茨个人的独创性的伟大贡献外, 近代意义上的二进制实际上是“中西合璧”的产物.
分析评价	本案例高阶导数是高等数学与实际问题的一个重要桥梁, 它为解决生活中的一些实际问题提供了重要方法, 正所谓理论来源于生活又服务于生活.
评价者	杨存典教授, 商洛学院学生处

案例编号	AME012
案例标题	微分中值定理
案例来源	购买
内容简介	通过罗尔等数学家的自学成才的学习经历，引导正确对待学习，培养学生自主学习的习惯和学习能力。引导学生用数学的眼光去观察、分析、解决生活中的问题，通过在生活中用数学，增强学生对数学价值的体验，强化学生应用数学的意识。
关键词	罗尔定理，拉格朗日中值定理，柯西中值定理
编写时间	2022-3-1
编著者	余亚辉等，洛阳理工学院
素材形式	文字等
育人主题	引导学生用数学的眼光去观察、分析、解决生活中的问题，通过在生活中用数学，增强学生对数学价值的体验，强化学生应用数学的意识。
素材长度	1229
案例正文	一. 结合实际，情境导入 2013年2月5日，江苏正式启用了高速公路机动车全程区间测速系统，当前已经在全国各地普及，区间测速通过在同一路段两个相邻的监控点架设两台摄像机，建立监控抓拍系统，对道路卡点监测区域内所通行的车辆进行两次实时监控，计算两个相邻测速监控点之间的路段(测速区间)的平均速度。 如果能够得到路程和时间的一个函数关系，就可以求出在任何时间段内的平均速度，并且能够得到在该时间段内肯定有某一时刻的速度等于平均速度。 将这个问题用数学语言来描述就是：设从时刻a开始到时刻b，路程函数是$s = s(t)$，速度函数是$v = v(t)$，已知s在$[a, b]$上连续，(a, b)内可导，则至少会存在某一时刻ξ ($a < \xi < b$)的瞬时速度$v(\xi) = s'(\xi)$正好等于这一时间段的平均速度$\frac{s(b) - s(a)}{b - a}$，即 $v(\xi) = s'(\xi) = \frac{s(b) - s(a)}{b - a}$ 在数学上通常会把实际问题抽象出来，升华到数学理论，从而去解决更多的实际问题，以上结论指出了函数在某一区间上的平均变化率和中间某一点瞬时变化率(即一个函数在一个区间上的整体的性质和中间某一点的局部性质)的关系，即$s'(\xi) = \frac{s(b) - s(a)}{b - a}$，这就是我们通常所说的中值定理。 思政元素 数学与生活. 二. 自然过渡，引出定理 1 罗尔定理

	如果函数 $y = f(x)$ 满足下列三个条件: (1) 在闭区间 $[a, b]$ 上连续; (2) 在开区间 (a, b) 内可导; (3) $f(a) = f(b)$. 则至少存在一点 $\xi \in (a, b)$, 使 $f'(\xi) = 0$. 从几何角度分析定理条件的含义: 条件(1)、(3)表明曲线 $y = f(x)$ 是平面上一条以两个同高度的点 $A(a, f(a))$、$B(b, f(b))$ 为端点的连续曲线, 条件(2)是说曲线在 (a, b) 内处处有不平行于 y 轴的切线, 结论是说在开区间 (a, b) 内部必至少有一点, 使得曲线 $y = f(x)$ 在该点的切线平行于 x 轴, 从而平行于弦 AB. 一句话, 平面上一条以两个同高度的点为端点的连续曲线处处有不平行于 y 轴的切线时, 其线内至少有一点, 其切线平行于 x 轴. 注: (1) 罗尔定理的结论也可以叙述为: 方程 $f(x) = 0$ 在 (a, b) 内至少有一个实根. (2) 定理的三个条件作为一个整体是结论成立的充分不必要条件. 思政元素 数学家罗尔 2 拉格朗日中值定理 罗尔定理的条件(1) (2)很重要且具有一般性, 但条件(3)比较苛刻, 函数一般不满足它, 从而限制了定理的应用。如果去掉条件(3), 罗尔定理的结论会发生什么变化? 拉格朗日给出了回答. 拉格朗日中值定理如果函数 $y = f(x)$ 满足下列两个条件: (1) 在闭区间 $[a, b]$ 上连续; (2) 在开区间 (a, b) 内可导 则至少存在一点 $\xi \in (a, b)$, 使 $f'(\xi) = \frac{f(b) - f(a)}{b - a} \text{ 或 } f(b) - f(a) = f'(\xi)(b - a).$
--	---

	分析如图示:设有连续函数 $y = f(x)$, a 与 b 是它定义区间内的两点且 $a < b$, 函数在 (a,b) 内处处可导, 也就是在 (a,b) 内的函数图形上处处都有不平行于 y 轴的切线, 从图形上知道, 比值 $\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{f(b)-f(a)}{b-a}$, 就是割线 AB 的斜率, 把割线 AB 作平行于自身的移动, 那么至少有一次机会达到一点 $P(x = \xi)$ 处成为曲线的切线, 而曲线的斜率为 $f'(\xi)$, 由于切线与割线是平行的, 因此成立 $f'(\xi) = \frac{f(b)-f(a)}{b-a}$ 由拉格朗日中值定理可得到以下推论: 推论 1 若 $f(x)$ 在 (a,b) 内恒有 $f'(x) = 0$, 则 $f(x) = C$, $x \in (a,b)$; 推论 2 若在 (a,b) 内恒有 $f'(x) = g'(x)$, 则 $f(x) - g(x) = C, x \in (a,b)$. 思政元素 数学家拉格朗日. 3 柯西中值定理 对拉格朗日中值定理再进一步推广, 可得到柯西中值定理 如果函数 $f(x)$ 与 $g(x)$ 满足下列条件: (1) 在闭区间 $[a,b]$ 上连续; (2) 在开区间 (a,b) 内可导; (3) $g'(x) \neq 0, x \in (a,b)$. 则在 (a,b) 内至少存在一点 ξ, 使得 $\frac{f(b)-f(a)}{g(b)-g(a)} = \frac{f'(\xi)}{g'(\xi)}$. 思政元素 数学家柯西 注: (1) $a > b$ 时, 柯西中值定理的结论仍成立; (2) 如果取函数 $g(x) = x$, 柯西中值定理就变成拉格朗日中值定
--	---

理了,所以柯西中值定理是拉格朗日中值定理的推广,罗尔中值定理是拉格朗日中值定理的特殊情况.拉格朗日中值定理是中值定理的核心定理,故称之为微分学中值定理。

三. 巩固练习, 拓展应用

思政元素

习近平新时代中国特色社会主义思想与以往党的理论创新成果是一脉相承、继承和发展的。

应用 1 【证明方程根的存在性】

例 1 设 $a_0, a_1, \dots, a_n$, 为满足 $a_0 + \frac{a_1}{2} + \frac{a_3}{3} + \dots + \frac{a_n}{n+1} = 0$ 的实数, 证明方程 $a_0 + a_1x + a_2x^2 + \dots + a_nx^n = 0$ 在 $(0,1)$ 内至少有一个实根.

证明 设 $f(x) = a_0x + \frac{a_1}{2}x^2 + \frac{a_2}{3}x^3 + \dots + \frac{a_n}{n+1}x^{n+1} = 0$, 则 $f(x)$ 在 $[0,1]$ 上连续, 在 $(0,1)$ 内可导, 且 $f(0) = 0$, $f(1) = a_0 + \frac{a_1}{2} + \frac{a_2}{3} + \dots + \frac{a_n}{n+1} = 0$, 由罗尔定理, 至少有一个 $\xi \in (0,1)$ 使

$$f'(\xi) = a_0 + a_1\xi + a_2\xi^2 + \dots + a_n\xi^n = 0$$

即方程 $a_0 + a_1x + a_2x^2 + \dots + a_nx^n = 0$ 在 $(0,1)$ 内至少有一个实根.

应用 2 【证明不等式】

例 2 证明: 当 $x > 0$ 时, $\frac{x}{1+x} < \ln(1+x) < x$.

证明 设 $f(x) = \ln(1+x)$, 显然 $f(x)$ 在区间 $[0,x]$ 上满足拉格朗日中值定理的条件, 根据定理, 就有

$$f(x) - f(0) = f'(\xi)(x-0) \quad (0 < \xi < x)$$

即

$$\ln(1+x) = \frac{x}{1+\xi}$$

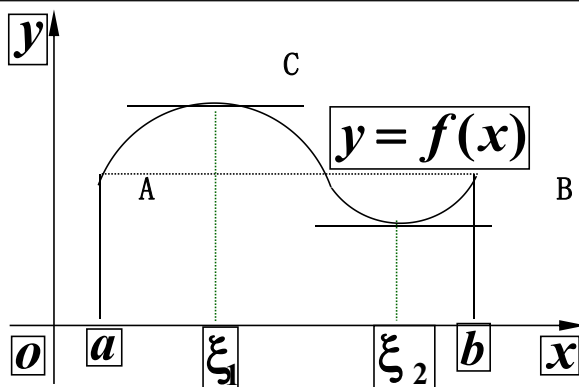
又由 $0 < \xi < x$ 有: $\frac{x}{1+x} < \ln(1+x) < x$.

应用 3 【证明等式】.

例 3 证明: $\arcsin x + \arccos x = \frac{\pi}{2}$, $x \in [-1,1]$.

	证明 令 $f(x) = \arcsin x + \arccos x$，则 $f'(x) = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} + \left(-\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}\right) = 0$ 由拉格朗日中值定理可知 $f(x) = C$，又由于 $f(0) = \arcsin 0 + \arccos 0 = \frac{\pi}{2}$ 即 $C = \frac{\pi}{2}$，从而 $\arcsin x + \arccos x = \frac{\pi}{2}, x \in [-1, 1].$ 同理可证 $\arctan x + \operatorname{arccot} x = \frac{\pi}{2}$ 例 4 设 $f(x)$ 在 $[a, b]$ 上连续，在 (a, b) 内可导 $(a > 0)$，证明在 (a, b) 内至少存在一点 ξ，使得 $2\xi[f(b) - f(a)] = (b^2 - a^2)f'(\xi).$ 证明 令 $F(x) = x^2$，则 $f(x)$、$F(x)$ 在 $[a, b]$ 上连续，在 (a, b) 内可导， 且 $F'(x) = 2x \neq 0$. 由柯西定理，有 $\xi \in (a, b)$ 使 $\frac{f(b) - f(a)}{F(b) - F(a)} = \frac{f'(\xi)}{F'(\xi)}$ 即 $2\xi[f(b) - f(a)] = (b^2 - a^2)f'(\xi).$
分析评价	通过罗尔等数学家的自学成才的学习经历，引导正确对待学习，培养学生自主学习的习惯和学习能力。引导学生用数学的眼光去观察、分析、解决生活中的问题，通过在生活中用数学，增强学生对数学价值的体验，强化学生应用数学的意识。
评价者	杨存典教授，商洛学院学生处

案例编号	AME013
案例标题	微分中值定理
案例来源	原创
内容简介	通过将相关的数学史、数学家（罗尔、拉格朗日、柯西）故事适时、适量、适当地引入课堂，使学生体会到现成结论背后的“火热的思考”，以数学家的精神品质感染学生. 引导学生坚定理想信念，树立正确的世界观、人生观、价值观，培养学生不畏艰难、勇于克服困难的良好精神品质，严谨的求学态度.
关键词	费马引理，罗尔定理，拉格朗日定理，柯西中值定理
编写时间	2021-9-3
编著者	杨燕，副教授，商洛学院
素材形式	文字、图片等
育人主题	不畏艰难、勇于克服困难的良好精神品质，严谨的求学态度.
素材长度	1088
案例正文	一、罗尔定理 为应用方便，先介绍费马（Fermat）引理 费马引理 设函数 $f(x)$ 在点 x_0 的某邻域 $U(x_0)$ 内有定义，并且在 x_0 处可导，如果对任意 $x \in U(x_0)$，有 $f(x) \leq f(x_0)$（或 $f(x) \geq f(x_0)$），那么 $f'(x_0) = 0$. 证明：不妨设 $x \in U(x_0)$ 时，$f(x) \leq f(x_0)$（若 $f(x) \geq f(x_0)$，可以类似地证明）. 于是对于 $x_0 + \Delta x \in U(x_0)$，有 $f(x_0 + \Delta x) \leq f(x_0)$，从而当 $\Delta x > 0$ 时， $\frac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)}{\Delta x} \leq 0; \text{ 而当 } \Delta x < 0 \text{ 时, } \frac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)}{\Delta x} \geq 0;$ 根据函数 $f(x)$ 在 x_0 处可导及极限的保号性的得 $f'(x_0) = f'_+(x_0) = \lim_{\Delta x \rightarrow 0^+} \frac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)}{\Delta x} \leq 0$ $f'(x_0) = f'_-(x_0) = \lim_{\Delta x \rightarrow 0^-} \frac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)}{\Delta x} \geq 0, \text{ 所以 } f'(x_0) = 0, \text{ 证毕.}$ 定义 导数等于零的点称为函数的驻点 (或稳定点，临界点). 罗尔定理 如果函数 $f(x)$ 满足： 在闭区间 $[a, b]$ 上连续，（2）在开区间 (a, b) 内可导，（3）在区间端点处的函数值相等，即 $f(a) = f(b)$，那么在 (a, b) 内至少存在一点 $\xi (a < \xi < b)$，使得函数 $f(x)$ 在该点的导数等于零，即 $f'(\xi) = 0$. 几何意义： 对于在 $[a, b]$ 上每一点都有不垂直于 x 轴的切线，且两端点的连线与 x 轴平行的不间断的曲线 $f(x)$ 来说，至少存在一点 C，使得其切线平行于 x 轴.



从图中可以看出：符合条件的点出现在最大值和最小值点。

说明：

1. 若罗尔定理的三个条件中有一个不满足，其结论可能不成立；

2. 使得定理成立的点可能多于一个，也可能只有一个。

2. 拉格朗日 (Lagrange) 中值定理

在罗尔定理中，第三个条件为 (iii) $f(a) = f(b)$ ，然而对一般的函数，此条不满足，现将该条件去掉，但仍保留前两个条件，这样，结论相应地要改变，这就是**拉格朗日中值定理**：

定理 2：若函数满足：

(i) $f(x)$ 在 $[a, b]$ 上连续；

(ii) $f(x)$ 在 (a, b) 上可导；

则在 (a, b) 内至少存在一点 ξ ，

使得
$$f'(\xi) = \frac{f(b) - f(a)}{b - a}。$$

即 $f(b) - f(a) = f'(\xi)(b - a)$

若此时，还有 $f(a) = f(b)$ ，

$\Rightarrow f'(\xi) = 0$ 。可见罗尔中值定理是**拉格朗日中值定理**的一个特殊情况，因而用罗尔中值定理来证明之。

注 1：拉格朗日中值定理是罗尔中值定理的推广；

2: 定理中的结论，可以写成

$$f(b) - f(a) = f'(\xi)(b - a) \quad (a < \xi < b),$$

由定理还可得到下列结论：

推论 1：如果 $y = f(x)$ 在区间 I 上的导数恒为 0，则 $f(x)$ 在 I 上是一个常数。

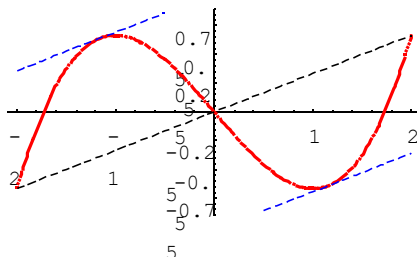
三、柯西中值定理

定理 3：若 $f(x), F(x)$ 满足：

(1) 在 $[a, b]$ 上连续； (2) 在 (a, b) 内可导； (3) $\forall x \in (a, b)$ $F'(x) \neq 0$ ，则在 (a, b) 内至少存在一点 ξ ，使得

$$\frac{f'(\xi)}{F'(\xi)} = \frac{f(b) - f(a)}{F(b) - F(a)}。$$

注：柯西中值定理是拉格朗日中值定理的推广，事实上，令



	$F(x) = x$，就得到拉格朗日中值定理：  米歇尔·罗尔 1652年4月21日— 1719年11月8日）， 是法国数学家。他著名 的有罗尔定理 (1691年)。  约瑟夫·拉格朗日 (1736~1813)，法国著名 数学家、物理学家。他 在数学、力学和天文学三 个学科领域中都有历史 性的贡献，其中尤以数学 方面的成就最为突出。  柯西 (1789—1857)，法国数 学家、物理学家、天文学 家。在数学领域有很高的 建树和造诣。很多数学定 理和公式都以他的名字命 名，如柯西不等式、柯西 中值定理。 思政元素： 1. 通过介绍罗尔定理，拉格朗日中值定理，柯西中值定理之间的关系，让学生理解唯物辩证法的联系观点，明白事物之间是普遍联系的，把握定理之间的内在联系，才能更好的理解和应用定理。 2. 介绍著名数学家（罗尔、拉格朗日、柯西）的个人成就和主要贡献，以数学家的精神品质感染学生. 引导学生坚定理想信念，树立正确的三观，培养学生不畏艰难、勇于克服困难的良好品质，和对数学严谨的求学态度及坚持不懈的钻研精神。
分析评价	本案例通过将相关的数学史、数学家（罗尔、拉格朗日、柯西）故事适时、适量、适当地引入课堂，使学生体会到现成结论背后的“火热的思考”，以数学家的精神品质感染学生. 引导学生坚定理想信念，树立正确的世界观、人生观、价值观，培养学生不畏艰难、勇于克服困难的良好精神品质，严谨的求学态度.
评价者	杨存典教授，商洛学院学生处

案例编号	AME014
案例标题	泰勒公式
案例来源	原创
内容简介	将相关的数学史、数学家（泰勒和麦克劳林）故事适时、适量、适当地引入课堂，使学生体会到现成结论背后的“火热的思考”，以数学家的精神品质感染学生。
关键词	数学史，泰勒公式，麦克劳林公式
编写时间	2021-6-29
编著者	刘敏，讲师，商洛学院
素材形式	文字、图片、表格等
育人主题	科学精神
素材长度	1329
案例正文	1. 在俄国革命期间，数学物理学家塔姆外出找食物，在靠近敖德萨的乡间被反共产主义的保安人员逮捕。保安人员怀疑他是反乌克兰的共产主义者，于是把他带回总部。 头目问：你是做什么的？塔姆：我是一位数学家。 头目心存怀疑，拿着枪，手指扣着扳机，对准他。手榴弹也在他的面前晃动。 头目说：现在我给你一个函数做泰勒展开，到第 n 项之后，你就把误差项算出来。如果你算对了，就放你一条生路，否则就立刻枪毙。于是塔姆手指发抖，战战兢兢地慢慢计算，当他完成时，头目看过答案，挥手叫他赶快离开，就这样塔姆逃过了一劫。塔姆在 1958 年获得诺贝尔物理奖，但是他从未再遇到这位非凡的头目。但是他在讲授微积分课程时，每次讲到泰勒定理时就会顺便说起这件事。 2. 泰勒（1685-1731）泰勒是 18 世纪早期英国牛顿学派最优秀的代表人物之一，主要著作《正的和反的增量方法》。泰勒真正闻名于世的就他在微积分学中的将函数近似成多项式函数的定理，即泰勒定理。然而，在半个世纪里，数学家们并没有认识到泰勒定理的重大价值，直到拉格朗日才真正地发现了它的价值所在。拉格朗日认为这个定理是微积分的基本定理，并且给出了它的余项表达式。而泰勒定理的严格证明是由一个世纪之后的柯西来完成的。泰勒公式主要是用多项式函数来逼近相对较复杂的函数：当遇到较难研究的函数时，可以用看似不够“精干”但相对来说比较“平易近人”且研究比较透彻的多项式函数来近似讨论。 3. 麦克劳林（1698-1746）——苏格兰数学家，著名物理学家、数学家牛顿的学生。麦克劳林是一位牧师的儿子，半岁丧父，9 岁丧母。由其叔父抚养成人。叔父也是一位收师。麦克劳林是一个神童，为了当牧师，他 11 岁考入格拉斯得大学学习神学，但入校不久便对数学产生了浓厚的兴趣，一年后转攻数学。17 岁取得了硕士学位，19 岁担任阿伯丁大学的数学教授并主持该校马里歇尔学院数学的工作，两年后被选为英国皇家学会会员，1722--1726 年在巴参从事研究工作，并在 1724 年因写了物体碰撞的杰出论文而荣获法国科学院资金，回后任爱丁堡大学校授，1719 年，麦克劳林在访问伦敦时见到了牛预，从此便成为牛顿的门生，1724 年，

	由于牛顿的大力推荐，他继续获得教授席位，麦克劳林 21 岁时发表了第一本重要著作《构造几何》，在这本书中描述了作圆锥曲线的一些新的巧妙方法，精辟地讨论了圆锥曲线及高次平面曲线的种种性质. 1742 年撰写的《流数论》以泰勒多项式作为基本工具，是对牛顿的流数法作出符合逻辑的、系统解释的第一本书. 他得到数学分析中著名的麦克劳林级数展开式. 并用待定系数法给予证明. 4. 通过历史故事讲解，提高学生的兴趣，激起学生的好奇心，然后逐步将学生带进本节内容理论知识上. 并且以”数学可以救命”这种幽默诙谐的方式引导学生数学学习的重要性. 通过几位数学家对泰勒定理研究的时间线介绍, 数学家们经过 200 多年时间才真正的搞明白. 揭示科学发展的曲折历程，帮助学生树立科学品质，培养探索精神和良好的科学精神. 使学生领悟到生活中可借助已有的简单工具和方法来解决比较复杂问题的智慧，生活不是只有直线，一条路走不通时可以转弯，总能到达理想彼岸.
分析评价	本案例将相关的数学史、数学家（泰勒和麦克劳林）故事适时、适量、适当地引入课堂，使学生体会到现成结论背后的“火热的思考”，以数学家的精神品质感染学生.
评价者	杨存典教授，商洛学院学生处

案例编号	AME015
案例标题	泰勒公式
案例来源	原创
内容简介	泰勒公式主要是用多项式函数来逼近相对较复杂的函数：当遇到较难研究的函数时，可以用研究比较透彻的多项式函数来近似讨论，使学生领悟到生活中可借助已有的简单工具和方法来解决比较复杂问题的智慧，生活不是只有直线，一条路走不通时可以转弯，总能到达理想彼岸。
关键词	泰勒公式，麦克劳林公式，余项
编写时间	2021-9-4
编著者	杨燕、副教授，商洛学院
素材形式	文字、图片等
育人主题	借助已有的简单工具和方法来解决比较复杂问题
素材长度	1009
案例正文	多项式是函数中最简单的一种，用多项式近似表达函数是近似计算中的一个重要内容，泰勒公式就是一个应用广泛，精度更高的近似公式。 泰勒中值定理：如果函数 $f(x)$ 在 x_0 的某个开区间 (a,b) 内具有直到 $(n+1)$ 阶的导数，则当 $x \in (a,b)$ 时，$f(x)$ 可表示为 $(x-x_0)$ 的一个 n 次多项式 $P_n(x)$ 和一个余项 $R_n(x)$ 之和： $f(x) = f(x_0) + f'(x_0)(x-x_0) + \frac{f''(x_0)}{2!}(x-x_0)^2 + \dots + \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x-x_0)^n + R_n(x) \quad (1)$ 其中 $R_n(x) = \frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!}(x-x_0)^{n+1} \quad (\xi \text{ 介于 } x_0 \text{ 与 } x \text{ 之间}) \quad (2)$ 注 1：（1）式称为 $f(x)$ 按 $(x-x_0)$ 的幂展开到 n 阶的 Taylor 公式，$R_n(x)$ 的表达式（2）称为 Lagrange 型余项； 2：当 $n=0$ 时（1）变为：$f(x) = f(x_0) + f'(\xi)(x-x_0)$（$\xi$ 介于 x_0 与 x 之间），这就是 Lagrange 公式；即泰勒中值定理是拉格朗日中值定理的推广。 皮亚诺型余项 $R_n(x) = o((x-x_0)^n)$， 3：取 $x_0 = 0$，$f(x)$ 的麦克劳林公式 $f(x) = f(0) + f'(0)x + \frac{f''(0)}{2!}x^2 + \dots + \frac{f^{(n)}(0)}{n!}x^n + R_n(x) \quad (4)$ 由此得到近似公式： $f(x) = f(0) + f'(0)x + \frac{f''(0)}{2!}x^2 + \dots + \frac{f^{(n)}(0)}{n!}x^n$ 例 1 求 $f(x) = e^x$ 的 n 阶麦克劳林公式。 解：$f(x) = f'(x) = f''(x) = \dots = f^{(n)}(x) = e^x$

	$\Rightarrow f(0) = f'(0) = f''(0) = \dots = f^{(n)}(0) = 1,$ 又 $f^{(n+1)}(x) = e^x$ 所以 $f^{(n+1)}(x) = e^{\theta x} \Rightarrow R_n(x) = \frac{e^{\theta x}}{(n+1)!} x^{n+1} \quad (0 < \theta < 1),$ 令代入 (4) 式得: $e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \dots + \frac{x^n}{n!} + \frac{e^{\theta x}}{(n+1)!} x^{n+1} \quad (0 < \theta < 1).$ 由这个公式可知, 若把 e^x 用它的 n 次近似多项式表达为 $e^x \approx 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \dots + \frac{x^n}{n!}$ 所产生的误差为 $R_n(x) = \left \frac{e^{\theta x}}{(n+1)!} x^{n+1} \right < \frac{e^{ x }}{(n+1)!} x ^{n+1} \quad (0 < \theta < 1)$ 例如取 $x=1$, 得到 $e \approx 1 + 1 + \frac{1}{2!} + \dots + \frac{1}{n!}$ 其误差 $R_n < \frac{e}{(n+1)!} < \frac{3}{(n+1)!}.$ $n=10, e \approx 2.718282$, 其误差不超过 10^{-6}。 例 2 求极限 $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x - \sin x}{x^3}$ 的值。 解: 写出 $\sin x$ 的四阶泰勒公式: $\sin x \approx x - \frac{x^3}{3!} + o(x^4)$, 代入极限式得 $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x - \sin x}{x^3} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x - [x - \frac{x^3}{3} + o(x^4)]}{x^3} = \frac{1}{6}$ 思政元素: 泰勒公式主要是用多项式函数来逼近相对较复杂的函数: 当遇到较难研究的函数时, 可以用研究比较透彻的多项式函数来近似讨论, 使学生领悟到生活中可借助已有的简单工具和方法来解决比较复杂问题的智慧, 生活不是只有直线, 一条路走不通时可以转弯, 总能到达理想彼岸。
分析评价	泰勒公式主要是用多项式函数来逼近相对较复杂的函数: 当遇到较难研究的函数时, 可以用研究比较透彻的多项式函数来近似讨论, 使学生领悟到生活中可借助已有的简单工具和方法来解决比较复杂问题的智慧, 生活不是只有直线, 一条路走不通时可以转弯, 总能到达理想彼岸。
评价者	杨存典教授, 商洛学院学生处

案例编号	AME016
案例标题	函数的单调性
案例来源	购买
内容简介	通过案例，学生学会在处理问题能够使复杂问题简单化、抽象问题具体化，培养学生善于运用数形结合分析问题的能力；用数学诠释生活将数学语言和符号书写在人们的日常生活中。
关键词	函数；单调性；判别方法
编写时间	2022-3-1
编著者	余亚辉等，洛阳理工学院
素材形式	文字等
育人主题	讲中国故事，传播中国声音，弘扬人与自然和谐相处理念。体现中国综合国力、自主创新能力和勇创世界一流的民族志气，提升学生的民族自豪感，最终培养学生解决实际问题的能力。
素材长度	1030
案例正文	一、温故知新，引出新课 函数单调性 让同学们观察单调函数的导数的符号。 分组讨论：能否用导数的符号判别函数的单调性呢？尝试用拉格朗日中值定理进行探索。 单调增加：$f'(x) > 0$ 单调减少：$f'(x) < 0$ 抽查讨论结果并讲评。 分析：假设 $f(x)$ 在 $[a, b]$ 上连续，(a, b) 内可导，$\forall x_1, x_2 \in [a, b]$，且 $x_1 < x_2$，在 $[x_1, x_2]$ 运用拉格朗日中值定理得 $f(x_2) - f(x_1) = f'(\xi)(x_2 - x_1)$ 因为 $x_2 - x_1 > 0$， 若在 (a, b) 内恒有 $f'(x) > 0$，则 $f'(\xi) > 0$，于是 $f(x_2) - f(x_1) > 0$，即函数 $f(x)$ 单调增加； 若在 (a, b) 内恒有 $f'(x) < 0$，则 $f'(\xi) < 0$，于是 $f(x_2) - f(x_1) < 0$，即函数 $f(x)$ 单调减少。 思政元素 数形结合的思想。 二、归纳总结，给出定理 单调性判别定理

定理 1 设函数 $f(x)$ 在闭区间 $[a, b]$ 上连续, 在开区间 (a, b) 内可导, 则有

(1) 若在 (a, b) 内 $f'(x) > 0$, 则 $f(x)$ 在 $[a, b]$ 上单调增加;

(2) 若在 (a, b) 内 $f'(x) < 0$, 则 $f(x)$ 在 $[a, b]$ 上单调减少.

注记

(1) 定理中的闭区间换成其他各种区间 (包括无穷区间), 结论仍然成立.

(2) 若在 (a, b) 内 $f'(x) \geq 0$, [或 $f'(x) \leq 0$], 但等号只在个别点处成立, 则也有相应结论.

例 1 判定函数 $y = x - \sin x$ 在 $[-\pi, \pi]$ 上的单调性.

解 因为在 $[-\pi, \pi]$ 内 $y' = 1 - \cos x \geq 0$, 且等号仅在 $x = 0$ 处成立, 所以函数 $y = x - \sin x$ 在 $[-\pi, \pi]$ 上单调增加.

函数单调性应用——证明不等式

不等式证明通常比较困难, 其原因在于证明不等式的方法虽很多, 但各种方法通常都不具一般性. 利用拉格朗日中值定理可以证明不等式, 但该方法要求所证不等式能写成某个函数的增量的形式, 因而也不够一般性. 利用函数的单调性, 可建立一种不等式证明的较一般的方法.

例 2 证明对任何实数 x , 有 $e^x \geq 1 + x$.

证明 令 $f(x) = e^x - 1 - x$, 则 $f'(x) = e^x - 1$.

当 $x > 0$ 时, $f'(x) > 0$, f 单调增加, 故 $f(x) > f(0)$;

当 $x < 0$ 时, $f'(x) < 0$, f 单调减少, 故 $f(x) > f(0)$; 又因为 $f(0) = 0$,

所以当 $x \neq 0$ 时, $f(x) > f(0)$ 恒成立, 即 $e^x > 1 + x$. 而当 $x = 0$ 时,

$e^x = 1 + x$. 所以对任何实数 x , 有 $e^x \geq 1 + x$.

思政元素

数学与生活.

①利用导数判断函数的单调性, 是导数几何意义在研究曲线变化规律时的重要应用, 充分体现了数形结合的思想, 我国著名数学家华罗庚曾说过: “数形结合百般好, 隔裂分家万事休.”

②生活中经常会有许多关于“单调”的说法, 例如常有人说: “我的生活好单调.” 其实表达的就是生活中没有波折, 每天都是一个

	样，没有做到多姿多彩. ③同一个函数，随着自变量的变化，呈现出不同的单调性，成语“否极泰来”和“乐极生悲”都是生活中单调性改变的生动说明.
分析评价	通过案例，学生学会在处理问题能够使复杂问题简单化、抽象问题具体化，培养学生善于运用数形结合分析问题的能力；用数学诠释生活将数学语言和符号书写在人们的日常生活中。
评价者	杨存典教授，商洛学院学生处

案例编号	AME017
案例标题	函数的极值与最值
案例来源	购买
内容简介	讲解极值存在的必要和充分条件，以及求函数的单调区间和极值的步骤，并举例说明，通过生活中单调性和极值的应用，教育学生响应总书记号召，做到好学力学，把学习放在重要位置，坚持学习，积沙成塔，积跬步以致千里。
关键词	函数；极值；最值；判别方法
编写时间	2022-3-1
编著者	余亚辉等，洛阳理工学院
素材形式	文字等
育人主题	讲中国故事，传播中国声音，弘扬人与自然和谐相处理念。体现中国综合国力、自主创新能力和勇创世界一流的民族志气，提升学生的民族自豪感，最终培养学生解决实际问题的能力。
素材长度	1030
案例正文	深化概念，定义极值 函数极值的定义 定义 1 设 $f(x)$ 在 x_0 的某领域 $U(x_0, \varsigma)$ 内有定义. 若对任意 $x \in U(x_0, \varsigma)$ 内有 $f(x) < f(x_0)$, 则称 $f(x)$ 在点 x_0 取得极大值 $f(x_0)$; 若对任意 $x \in U(x_0, \varsigma)$ 内有 $f(x) > f(x_0)$, 则称 $f(x)$ 在点 x_0 取得极小值 $f(x_0)$. 函数的极大值与极小值统称为函数的极值，使函数取得极值的点称为极值点. 极值的说明： (1) 极值是一个局部概念，是局部的最值，而最值是个整体概念，一个函数不仅可有多个不等的极大值和极小值，而且极小值还可以大于极大值，而最大值、最小值都只能是唯一的，且最值点有可能是区间的端点. 函数的极值点只能是函数定义区间内部的点，区间的端点不会是函数极值点. 思政元素 极值不是最值，定义告诉我们“人外有人，天外有天”. (2) 可能取得极值的点有导数等于零的点(驻点)和导数不存在

的点(不可导点).

驻点: 使 $f'(x)=0$ 的点 x 称为函数 $f(x)$ 的驻点.

定理 2 (极值存在的必要条件) 设函数 $f(x)$ 在 x_0 处可导, 且在点 x_0 处取得极值, 那么 $f'(x_0)=0$.

证明 不妨设 x_0 为极大值点, 即在 x_0 的某邻域内有 $f(x) < f(x_0) (x \neq x_0)$. 因此有

当 $x < x_0$ 时, $\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0} > 0$, 有

$$f'_{-}(x_0) = \lim_{x \rightarrow x_0^-} \frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0} \geq 0;$$

当 $x > x_0$ 时, $\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0} < 0$, 有

$$f'_{+}(x_0) = \lim_{x \rightarrow x_0^+} \frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0} \leq 0;$$

又 $f(x)$ 在 x_0 处可导, 即 $f'_{+}(x_0) = f'_{-}(x_0)$, 故 $f'(x_0)=0$.

同理, 对于 x_0 为极小值点的情形也可类似证明.

定理 3 (判别极值的第一充分条件)

设函数 $f(x)$ 在点 x_0 连续, 且在点 x_0 的某一去心邻域 $U(x_0, \varsigma)$ 内可导.

(1) 若 $x \in (x_0 - \varsigma, x_0)$ 时, $f'(x) > 0$, $x \in (x_0, x_0 + \varsigma)$ 时 $f'(x) < 0$, 则 $f(x)$ 在点 x_0 处取得极大值;

(2) 若 $x \in (x_0 - \varsigma, x_0)$ 时, $f'(x) < 0$, $x \in (x_0, x_0 + \varsigma)$ 时 $f'(x) > 0$, 则 $f(x)$ 在点 x_0 处取得极小值;

(3) 若 $f'(x)$ 在 $x \in U(x_0, \varsigma)$ 内不改变符号, 则 $f(x)$ 在点 x_0 处不取得极值.

注记 函数判别极值的第一充分条件优点是既可判别驻点的极值性，也可判别导数不存在的点的极值性。

求函数的单调区间和极值的步骤：

- (1) 写出定义域，计算导数 $f'(x)$ ；
- (2) 求出 $f(x)$ 的全部驻点和不可导点；
- (3) 以上述点为分界点，列表讨论（考察 $f'(x)$ 的符号在每个驻点和不可导点的左右邻近的情况，以便确定该点是否是极值点）；
- (4) 确定出函数的单调区间和所有极值。

定理 4（判别极值的第二充分条件）

设函数 $f(x)$ 在点 x_0 处有二阶导数，且 $f'(x_0) = 0, f''(x_0) \neq 0$ ，则

- (1) 如果 $f''(x_0) < 0$ ，则 $f(x)$ 在点 x_0 处取得极大值；
- (2) 如果 $f''(x_0) > 0$ ，则 $f(x)$ 在点 x_0 处取得极小值；
- (3) 当 $f''(x_0) = 0$ 时， $f(x)$ 在点 x_0 处可能取得极值也可能不取得极值。

例 3 求 $f(x) = x^{\frac{2}{3}}(x-5)$ 的极值和单调区间。

解 定义域为 $(-\infty, \infty)$ ，计算导数

$$f'(x) = \frac{2}{3}x^{-\frac{1}{3}}(x-5) + x^{\frac{2}{3}} = \frac{1}{3}x^{-\frac{1}{3}}(2x-10+3x) = \frac{5x-10}{3\sqrt[3]{x}}.$$

令 $f'(x) = 0$ 得 $x = 2$ ，另有 $f'(x)$ 不存在的点 $x = 0$ 。

列表讨论

x	$(-\infty, 0)$	0	$(0, 2)$	2	$(2, +\infty)$
$f'(x)$	+	不存在	-	0	+
$f(x)$	$\nearrow$	极大值	$\searrow$	极小值	$\nearrow$

综上， $f(x)$ 在 $(-\infty, 0]$ 和 $[2, +\infty)$ 单调增加，在 $[0, 2]$ 单调减少，在 $x = 0$ 处取得极大值 $f(0) = 0$ ，在 $x = 2$ 处取得极小值

	$f(2) = -3\sqrt[3]{4}.$ 例4 求函数 $f(x) = x^3 + 3x^2 - 9x - 6$ 的极值. 解 定义域为 $(-\infty, +\infty)$, 计算导数 $f'(x) = 3x^2 + 6x - 9 = 3(x-1)(x+3)$, $f''(x) = 6(x+1)$ 令 $f'(x) = 0$ 得 两个驻点 $x_1 = -3, x_2 = 1$. 因为 $f''(-3) = -12 < 0$, 所以 $f(-3) = 21$ 为极大值; 因为 $f''(1) = 12 > 0$, 所以 $f(1) = -11$ 是极小值. 注记 判别极值的第二充分条件优点是应用简便, 只需通过驻点处的二阶导数的符号便可确定可能极值点的极值性; 缺点是使用范围有限, 对 $f''(x) = 0$、$f'(x)$ 及 $f''(x)$ 同时不存在的点不能使用. 案例【坦克的破甲弹破甲深度问题】 99 式主战坦克的破甲弹击毁装甲目标, 观察破甲弹的内部剖面图, 破甲弹头螺的长度影响破甲弹的破甲深度, 当头螺长度过小时, 炸弹爆炸产生的金属射流还没能达到有效的速度和温度, 起不了多大作用, 头螺长度过大时, 会随着金属射流拉长而逐渐断裂. 也就是说, 随着头螺长度的变化, 破甲弹的破深经历了先增加后降低的过程, 像这种由增到减或者由减到增的转折点都蕴含着非常丰富的内涵. 求解破甲弹有利头螺长度与口径比值的问题, 实际上就可以转化为求函数极大值点的问题.
分析评价	讲解极值存在的必要和充分条件, 以及求函数的单调区间和极值的步骤, 并举例说明, 通过生活中单调性和极值的应用, 教育学生响应总书记号召, 做到好学乐学, 把学习放在重要位置, 坚持学习, 积沙成塔, 积跬步以致千里.
评价者	杨存典教授, 商洛学院学生处

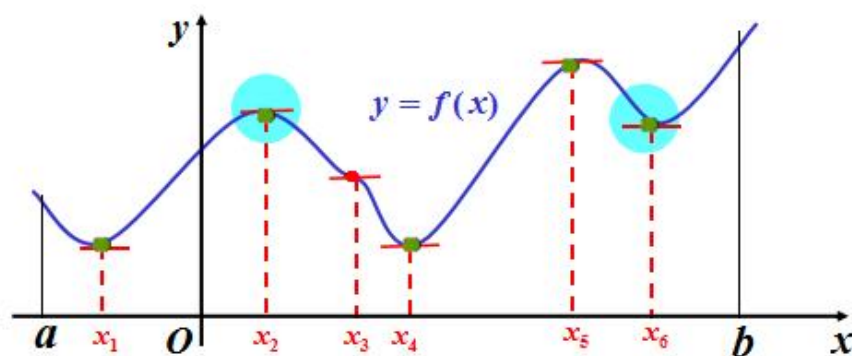
案例编号	AME018
案例标题	函数的极值和最值
案例来源	原创
内容简介	比较极值和最值的概念，让学生明白要认识事物的真相和全貌必须超越狭小的范围，摆脱主观成见。人生之路，起起落落是必经之路，是成长的需要，低谷和顶峰只是我们人生路上的一个转折点，告诉学生在跌入低谷时不气馁，甘于平淡不放任，伫立高峰不张扬，有宽阔的胸襟。
关键词	极大值，极小值，驻点
编写时间	2021-9-12
编著者	杨燕，副教授，商洛学院
素材形式	文字、图片等
育人主题	人生低谷时不气馁，高峰时不张扬，始终充满正能量
素材长度	1476
案例正文	通过《题西林壁》这首诗引入极值的概念，给抽象的数学课堂注入一缕诗情画意。  tí xī lín bì 题西林壁 【bēi sòng】 sū shī 【北宋】苏轼 héng kàn chéng líng cè chéng fēng 横看成岭侧成峰， yuǎn jìn gāo dī gè bù tóng 远近高低各不同。 bù shí lú shān zhēn miàn mù 不识庐山真面目， zhī yuán shēn zài cǐ shān zhōng 只缘身在此山中。 北宋文学家苏轼在《题西林壁》中写道：“横看成岭侧成峰，远近高低各不同，不识庐山真面目，只缘身在此山。”描绘的是庐山随着观察者角度不同，呈现出不同的样貌。庐山的山岭连绵起伏，就像函数取到极值的情况，极大值在山顶取得，极小值在山谷取得。

一、函数的极值

定义 1: 设函数 $f(x)$ 在点 x_0 的某邻域 $U(x_0)$ 上有定义, 若对 $\forall x \in U(x_0)$ 有 $f(x) < f(x_0)$, ($f(x) > f(x_0)$) 则称 x_0 是 $f(x)$ 的极大值点 (极小值点), $f(x_0)$ 就是 $f(x)$ 的极大值 (极小值)。

函数的极大值与极小值统称为函数的极值, 使函数取得极值的点称为极值点。

说明: 函数的极大值和极小值概念是局部性的. 如果 $f(x_0)$ 是函数 $f(x)$ 的一个极大值, 那只是就 x_0 附近的一个局部范围来说, $f(x_0)$ 是 $f(x)$ 的一个最大值; 如果就 $f(x)$ 的整个定义域来说, $f(x_0)$ 不一定是最大值. 对于极小值情况类似。



思政元素: 人生之路, 起起落落是必经之路, 是成长的需要, 我们要在跌入低谷时不气馁, 甘于平淡不放任, 伫立高峰不张扬, 有宽阔的胸襟, 要学会用运动的观点看问题, 低谷和顶峰只是我们人生路上的一个转折点。要认识事物的真相和全貌必须超越狭小的范围, 摆脱主观成见。

极值与水平切线的关系: 在函数取得极值处, 曲线上的切线是水平的. 但曲线上有水平切线的地方, 函数不一定取得极值。

由费马引理可得

定理 1 (极值的必要条件): 若函数 $f(x)$ 在 x_0 点可导, 且 x_0 点取得极值, 则 $f'(x_0) = 0$ 。

注: 1、一般地, $f'(x)$ 在 $x = x_0$ 处有 $f'(x_0) = 0$, 就称 x_0 为 $f(x)$ 的驻点或稳定点, 上定理 1 即是可导函数的极点必为驻点。

2、驻点未必是极点, 及例: $f(x) = x^3$ 在 $x=0$ 处的情况。

3、定理 1 只对可导函数而言, 对导数不存在的点, 函数也可能取及极值。

例： $f(x) = |x|$ ，在 $x=0$ 点的导数不存在，但取得极小值。

如何判别 $f(x)$ 在 x_0 点取得极值，有下二个定理：

定理 2（第一充分条件），若函数 $f(x)$ 在 $U(x_0)$ 内可导，且 $f'(x_0) = 0$ 。

- 1) 若当 $x < x_0$ 时 $f'(x) > 0$ ，而 $x > x_0$ 时 $f'(x) < 0$ ，则 $f(x_0)$ 是极大值。
- 2) 若当 $x < x_0$ 时 $f'(x) < 0$ ，而 $x > x_0$ 时 $f'(x) > 0$ ，则 $f(x_0)$ 是极小值。
- 3) 若当 $x < x_0$ 及 $x > x_0$ 时均有 $f'(x) > 0$ （或均有 $f'(x) < 0$ ），则 $f(x_0)$ 不是极值。

注：定理条件改为：若函数 $f(x)$ 在 $\overset{\circ}{U}(x_0)$ 可导（ $f'(x_0)$ 可以不存在），其他条件不变定理也成立。

求极值的步骤：

- 1) 求出导数 $f'(x)$ ；
- 2) 求出 $f(x)$ 的全部驻点和不可导点；
- 3) 按照定理 2 考察每个驻点和不可导点左右两侧导数的符号，确定是否为极值点。

求出各极值点处的函数值，即得 $f(x)$ 的全部极值。

例 1 求函数 $f(x) = (x-4)\sqrt[3]{(x+1)^2}$ 的极值。

解(1) $f(x)$ 在 $(-\infty, +\infty)$ 内连续，除 $x=-1$ 外处处可导，且 $f'(x) = \frac{5(x-1)}{3\sqrt[3]{x+1}}$ ；

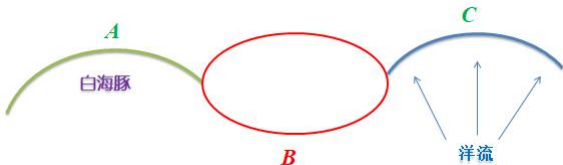
(2) 令 $f'(x)=0$ ，得驻点 $x=1$ ； $x=-1$ 为 $f(x)$ 的不可导点；

(3) 列表判断

x	$(-\infty, -1)$	-1	$(-1, 1)$	1	$(1, +\infty)$
$f'(x)$	+	不可导	-	0	+
$f(x)$	$\nearrow$	0	$\searrow$	$-3\sqrt[3]{4}$	$\nearrow$

(4) 极大值为 $f(-1)=0$ ，极小值为 $f(1)=-3\sqrt[3]{4}$ 。

	当 $f(x)$ 在驻点处的二阶导数存在且不为零时, 则有以下定理: 定理 3 (第二充分条件) 设 $f(x)$ 在 x_0 的某邻域内一阶可导, 在 x_0 处具有二阶导数, 且 $f'(x_0) = 0$, $f''(x_0) \neq 0$, 那么 1) 若 $f''(x_0) < 0$, 则 $f(x)$ 在 x_0 点取得极大值; 2) 若 $f''(x_0) > 0$, 则 $f(x)$ 在 x_0 点取得极小值。 定理 3 表明, 如果函数 $f(x)$ 在驻点 x_0 处的二阶导数 $f''(x_0) \neq 0$, 那么该点 x_0 一定是极值点, 并且可以按二阶导数 $f''(x_0)$ 的符号来判定 $f(x_0)$ 是极大值还是极小值. 但如果 $f''(x_0) = 0$, 定理 3 就不能应用。 例 2 求函数 $f(x) = (x^2 - 1)^3 + 1$ 的极值。 解: $f'(x) = 3(x^2 - 1)^2 2x = 6x(x^2 - 1)^2$, 令 $f'(x) = 0$, 可得 $x = 0, x = -1, x = 1$; $f''(x) = 6(x^2 - 1)(5x^2 - 1)$ 由于 $f''(0) = 6 > 0$, 由定理 3 可知 $f(x)$ 在 $x = 0$ 处取得极小值, 极小值为 0; 由于 $f''(-1) = f''(1) = 0$, 定理 3 不能应用, 但是 $f'(x)$ 在 $x = \pm 1$ 处左右两值不变号, 所以由定理 2 可知, $f(x)$ 在 $x = \pm 1$ 处没有极值。 思政元素: 在实际工作生活中, 大到一个国家、一个单位、一个部门、小到一个人的一生, 本质上都是在追求极大或者最大值, 通过学习极值和最值, 让学生明白在学习和生活中, 当取得一点点成绩的时候, 千万不要骄傲自满, 因为天外有天, 人外有人, 踏踏实实做事儿, 谦虚谨慎做人。
分析评价	本案例介绍极值和最值的概念, 让学生明白要认识事物的真相和全貌必须超越狭小的范围, 摆脱主观成见。人生之路, 起起落落是必经之路, 是成长的需要, 低谷和顶峰只是我们人生路上的一个转折点, 告诉学生在跌入低谷时不气馁, 甘于平淡不放任, 伫立高峰不张扬, 有宽阔的胸襟。
评价者	杨存典教授, 商洛学院学生处

案例编号	AME019
案例标题	函数曲线的凹凸性
案例来源	原创
内容简介	本案例介绍函数曲线凹凸性的几何及代数判别方法的同时，讲中国故事，传播中国声音，弘扬人与自然和谐相处理念，展现中国人逢山开路、遇水架桥的奋斗精神，体现中国综合国力、自主创新能力和勇创世界一流的民族志气，提升学生的民族自豪感，最终培养学生解决实际问题的能力。
关键词	函数；曲线的凹凸性；判别方法
编写时间	2021-03-22
编著者	程国副教授，数学与计算机应用学院
素材形式	文字、图片等
育人主题	讲中国故事，传播中国声音，弘扬人与自然和谐相处理念。体现中国综合国力、自主创新能力和勇创世界一流的民族志气，提升学生的民族自豪感，最终培养学生解决实际问题的能力。
素材长度	2030
案例正文	（一）创设情境、兴趣导入 播放港珠澳大桥视频（1 分钟）。  图 1 港珠澳大桥 大桥跨越伶仃洋海域中华白海豚栖息地，为了保护白海豚，大桥的其中一段 A 需要建成曲线的形状；另外为了保证大桥 120 年的使用寿命，需要使得海水的流向与桥墩的方向保持一致，避免桥墩产生损害，大桥的另外一段 C 也被设计成了曲线的形状。 思政元素：讲中国故事、传播中国声音，激发学生的民族自豪感，感受“中国力量”和“中国智慧”。 提出问题：下图中缺失部分 B 如何设计？  图 2 （二）分析问题——几何分析、归纳方法

要解决所提出的问题，需要将弯曲的大桥抽象出来，放在二维平面中，通过观察，发现单调性已不足以表示曲线的几何形态，此时引入凹凸性概念——描述曲线的弯曲方向。

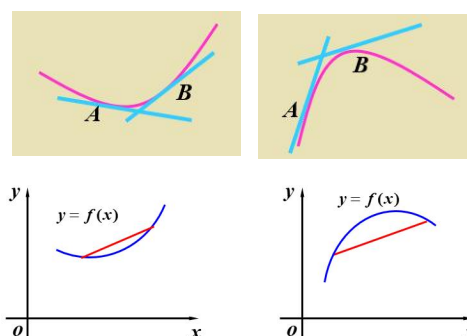


图 2 曲线的切线与弦

1.如何用数学的方法刻画函数凹凸性？

2.借助教具，先从简单易懂的几何方法入手，即直线与曲线的位置关系，启发学生思考。

3.根据学生讨论，教师总结——几何方法：

(1)**切线与曲线的位置关系**：若曲线光滑，即函数可导，则对于向下凹的曲线，其上任意一点处的切线均在曲线的下方；反之，对于向上凸的曲线，其上任意一点处的切线均在曲线的上方。

(2)**弦与曲线的位置关系**：对于向下凹的曲线，在曲线上任取两点，联结这两点的弦总位于这两点间曲线的上方；反之，对于向上凸的曲线，在曲线上任取两点，联结这两点的弦总位于这两点间曲线的下方。

(三) 分析问题——数形结合、概念讲授

定义 1：设 $f(x)$ 在区间 I 上连续，如果对 I 上任意两点 x_1, x_2 ，恒有

$$f\left(\frac{x_1+x_2}{2}\right) < \frac{f(x_1)+f(x_2)}{2}$$

那么称 $f(x)$ 在 I 上的图形是(向上)凹的(或凹弧)；如果恒有

$$f\left(\frac{x_1+x_2}{2}\right) > \frac{f(x_1)+f(x_2)}{2},$$

则称 $f(x)$ 在 I 上的图形是(向上)凸的(或凸弧)。

定义 2：设函数 $y=f(x)$ 在区间 I 上连续，如果函数的曲线位于其上任意

意一点的切线的上(下)方, 则称该曲线在区间 I 上是凹(凸)的。

定义 3: 连续函数曲线上凹凸的分界点称为曲线的拐点。

定理 2 设 $f(x)$ 在 $[a, b]$ 上连续, 在 (a, b) 内具有一阶和二阶导数, 则

(1)若在 (a, b) 内 $f''(x) > 0$, 则 $f(x)$ 在 $[a, b]$ 上的图形是凹的;

(2)若在 (a, b) 内 $f''(x) < 0$, 则 $f(x)$ 在 $[a, b]$ 上的图形是凸的。

证明: 只证(1). 设 $x_1, x_2 \in [a, b]$, 且 $x_1 < x_2$, 记 $x_0 = \frac{x_1 + x_2}{2}$, 由拉格朗日中值公式, 得

$$f(x_1) - f(x_0) = f'(\xi_1)(x_1 - x_0) = f'(\xi_1) \frac{x_1 - x_2}{2}, \quad x_1 < \xi_1 < x_0,$$

$$f(x_2) - f(x_0) = f'(\xi_2)(x_2 - x_0) = f'(\xi_2) \frac{x_2 - x_1}{2}, \quad x_0 < \xi_2 < x_2,$$

两式相加并应用拉格朗日中值公式得

$$f(x_1) + f(x_2) - 2f(x_0) = [f'(\xi_2) - f'(\xi_1)] \frac{x_2 - x_1}{2}$$

$$= f''(\xi)(\xi_2 - \xi_1) \frac{x_2 - x_1}{2} > 0, \quad \xi_1 < \xi < \xi_2,$$

即 $\frac{f(x_1) + f(x_2)}{2} > f(\frac{x_1 + x_2}{2})$, 所以 $f(x)$ 在 $[a, b]$ 上的图形是凹的。

注: 定理对于不是闭区间也成立。

思政元素: 严密的科学思维方法。

1. 引导学生画微信“笑脸”“哭脸”表情图, 并给出数学版的“笑脸”“哭脸”模型。



图 3 笑脸(左)与哭脸(右)

2. 教师凝练记忆口诀:

判断曲线凹凸性, 二阶导数来确定。

正为凹性负为凸, 拐点把那凹凸分。

3. 教师设置例题学生课堂练习, 求解函数的凹凸区间与拐点。观察每个小组的练习情况, 进行批阅指导; 教师点评分析给出规范解题

步骤。

【例 1】 判定曲线 $y=\ln x$ 的凹凸性。

解：函数的定义域为 $(0,+\infty)$ ， $y'=\frac{1}{x}, y''=-\frac{1}{x^2}$

当 $x>0$ 时 $y''<0$ ，故 $y=\ln x$ 在 $(0,+\infty)$ 内是向下凹的。

【例 2】 判断曲线 $y=x^3$ 的凹凸性。

解： $y'=3x^2, y''=6x$ 。由 $y''=0$ ，得 $x=0$ ，

当 $x<0$ 时， $y''<0$ ，所以曲线在 $(-\infty, 0]$ 内为凸的；

当 $x>0$ 时， $y''>0$ ，所以曲线在 $[0, +\infty)$ 内为凹的。

4. 教师凝练判断凹凸性的“五步法”

“定范围、求导数、找疑点、列表看、去验证”。

【例 3】 求曲线 $y=3x^4-4x^3+1$ 的拐点及凹、凸的区间。

解：(1)函数 $y=3x^4-4x^3+1$ 的定义域为 $(-\infty, +\infty)$ ；

$$(2) y'=12x^3-12x^2, y''=36x^2-24x=36x(x-\frac{2}{3});$$

$$(3) \text{解方程 } y''=0, \text{ 得 } x_1=0, x_2=\frac{2}{3};$$

(4)列表判断：

	$(-\infty, 0)$	0	$(0, 2/3)$	$2/3$	$(2/3, +\infty)$
$f''(x)$	+	0	-	0	+
$f(x)$	$\cup$	1	$\cap$	11/27	$\cup$

在区间 $(-\infty, 0]$ 和 $[2/3, +\infty)$ 上曲线是凹的，在区间 $[0, 2/3]$ 上曲线是凸的。点 $(0, 1)$ 和 $(2/3, 11/27)$ 是曲线的拐点。

5. 教师讲解两种可疑点未能成为拐点的情形。

【例 4】 讨论曲线 $y=\frac{x+1}{x}$ 的凹凸性及拐点。

解：由 $y''=\frac{2}{x^3}$ 可知没有二阶导数为零的点。函数的定义域为

$(-\infty, 0) \cup (0, +\infty)$ 讨论如下：

当 $x \in (-\infty, 0)$ 时， $y''<0$ ，曲线的凸的；

当 $x \in (0, +\infty)$ 时， $y''>0$ ，曲线的凹的；

由于 $x=0$ 不在定义域内，所以曲线无拐点。

【例 5】 问曲线 $y = x^4$ 是否有拐点？

解： $y' = 4x^3$, $y'' = 12x^2$ 。令 $y'' = 0$ ，得 $x = 0$ ；当 $x \neq 0$ 时, $y'' > 0$ ，在区间 $(-\infty, +\infty)$ 内曲线是凹的， 因此曲线无拐点。

【例 6】 求曲线 $y = \sqrt[3]{x}$ 的拐点。

解： $y = \sqrt[3]{x}$ 在 $(-\infty, +\infty)$ 内连续。

当 $x \neq 0$ 时， $y' = \frac{1}{3}x^{-\frac{2}{3}}$, $y'' = -\frac{2}{9}x^{-\frac{5}{3}}$ ；

当 $x = 0$ 时， $y = 0$ ， y', y'' 不存在。

但是 $x = 0$ 是 y'' 不存在的点，把定义域分成两个区间：
 $(-\infty, 0), (0, +\infty)$ 。在 $(-\infty, 0)$ 内 $y'' > 0$ ，曲线是凸的，在 $(0, +\infty)$ 内 $y'' < 0$ ，
曲线是凹的，所以 $(0, 0)$ 是曲线的拐点。

（四）解决问题——理论联系实际

1. 缺失大桥形状设计需要考虑的因素驾驶员的安全舒适性、美观性。
2. 要求大桥曲线光滑——对应数学上的可导。通过对已知桥面做曲线拟合，判断出未知桥面曲线应为一阶导单调递增的曲线，即二阶导大于零，利用凹凸性判定法对曲线拟合可知缺失段应该设计成凹弧。但凹弧并不唯一，可以设计出很多具有不同弯曲程度的凹弧，指出下节课要讲的知识点，曲线的弯曲程度——曲率。

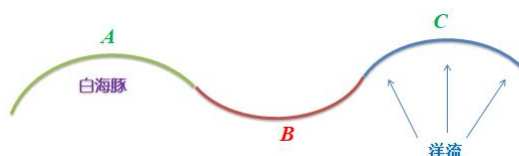


图 4 问题的解决

3. 教师讲述港珠澳大桥建设中的一个故事：2017 年 5 月 2 日，重达 6000 吨的沉管隧道最后接头将海底隧道连为一体，意味着港珠澳大桥主体工程即将全线贯通。然而面对返回的测量数据 16 厘米的误差让总工程师林鸣决定重新安装最后一节沉管，虽然这个误差是在大桥安装的容错范围内，又经过了四十二个小时的重新安装，误差被降低到 2.5 毫米。

思政元素：重大科技进展的背后都需要扎实的基础理论作支撑，鼓励学生认真学习文化知识，为祖国的科技发展贡献力量。

	思政元素：“立鸿鹄志，做奋斗者，求真学问，练真本领，为我们国家的科技发展贡献出自己的一份力量。” （五）课堂小结 1. 用思维导图对本节课的知识进行梳理。 2. 请学生继续收集和凹凸性有关的实际案例，让学生体会到生活中的数学无处不在，激发学生在生活中思考数学的热情。
分析评价	本案例介绍函数曲线凹凸性的几何及代数判别方法的同时，讲中国故事，传播中国声音，弘扬人与自然和谐相处理念，展现中国人逢山开路、遇水架桥的奋斗精神，体现中国综合国力、自主创新能力和勇创世界一流的民族志气，提升学生的民族自豪感，最终培养学生解决实际问题的能力。
评 价 者	杨存典教授，商洛学院学生处

案例编号	AME020
案例标题	函数的凹凸性与拐点
案例来源	购买
内容简介	数学作为重要的基础科学，与生活联系密切，与文学等其他学科也有相互映衬. 引导学生在学习过程中，把知识融会贯通，欣赏数学之美；鼓励学生做任何事情一方面要排除逻辑矛盾，另一方面要研究事物自身所固有的矛盾。
关键词	函数；凹凸性；判别定理
编写时间	2022-3-1
编著者	余亚辉等，洛阳理工学院
素材形式	文字
育人主题	引导学生在学习过程中，把知识融会贯通，欣赏数学之美；鼓励学生做任何事情一方面要排除逻辑矛盾，另一方面要研究事物自身所固有的矛盾。
素材长度	1079
案例正文	一. 结合实际，情境导入 把两个鸡蛋叠放在一起，如下图，大概率是上面的鸡蛋会掉下来摔碎，那么能不能实现呢?答案是肯定的，把两个鸡蛋看做一个系统，如果能达到平衡点，则大功告成，“双蛋系统”之所以能够达到平衡，需要巧妙应用鸡蛋表面的凹凸. 在 2020 年年初，新冠肺炎疫情肆虐之时，报道中经常会提到“拐点”，何为拐点?带着这些问题，我们来学习函数的凹凸性和拐点的相关知识 “疫情拐点”到底是什么意思?如何让“拐点”尽快到来?新冠肺炎疫情在不断刷新，人们期盼疫情能早日得到控制。 思政元素 新冠肺炎疫情传播与控制中有不少问题都可以通过数学思想和方法进行研究和说明，如疫情的拐点、感染人数比例计算原则、几何传播、传染病微分方程模型等，我们要学好数学知识，并用它来服务生活. 二. 归纳总结，形成概念 1. 凹凸的定义 下面两条曲线均为单调增加，说说它们的区别. 弧在弦的下方 弧在弦的上方

$$f\left(\frac{x_1+x_2}{2}\right) < \frac{1}{2}[f(x_1)+f(x_2)]$$

$$f\left(\frac{x_1+x_2}{2}\right) > \frac{1}{2}[f(x_1)+f(x_2)]$$

定义 1 设 $f(x)$ 在区间 I 上连续, 如果对 I 上任意两点 x_1, x_2 恒有

$$f\left(\frac{x_1+x_2}{2}\right) < \frac{f(x_1)+f(x_2)}{2}$$

那么称 $f(x)$ 在 I 上的图形是凹的(或凹弧); 如果恒有

$$f\left(\frac{x_1+x_2}{2}\right) > \frac{f(x_1)+f(x_2)}{2}$$

那么称 $f(x)$ 在 I 上的图形是凸的(或凸弧)。

三、尝试探究, 深化概念

如何借助导数判断曲线的凹凸性呢?

函数 $f(x)$ 在 $[a, b]$ 内可导, 它对应曲线是凹(或凸)的充分必要条件是: 一阶导数 $f'(x)$ 在区间 (a, b) 内是单调增加(或单调减少)。

定理(曲线凹凸性判定定理) 设函数在区间 I 内具有二阶导数,

(1) 如果在区间 I 内 $f''(x) > 0$, 则曲线 $y = f(x)$ 在 I 内是凹的;

(2) 如果在区间 I 内 $f''(x) < 0$, 则曲线 $y = f(x)$ 在 I 内是凸的。

证明 (1) 设 $x_1, x_2 \in [a, b]$, 且 $x_1 < x_2$, 记 $x_0 = \frac{x_1+x_2}{2}$. 由拉格朗日中值公式, 得

$$f(x_1) - f(x_0) = f'(\xi_1)(x_1 - x_0) = f'(\xi_1) \frac{x_1 - x_2}{2}, \quad x_1 < \xi_1 < x_0,$$

$$f(x_2) - f(x_0) = f'(\xi_2)(x_2 - x_0) = f'(\xi_2) \frac{x_2 - x_1}{2}, \quad x_0 < \xi_2 < x_2,$$

两式相加, 并应用拉格朗日中值公式, 得

$$f(x_1) + f(x_2) - 2f(x_0) = [f'(\xi_2) - f'(\xi_1)]$$

即 $\frac{f(x_1)+f(x_2)}{2} > f\left(\frac{x_1+x_2}{2}\right)$, 所以 $f(x)$ 在 (a, b) 内是凹的。

(2) 类似可证

思政元素: 数学与文学.

定义 2 拐点: 连续曲线 $y = f(x)$ 上凹凸性发生改变的点称为拐点.

四、巩固练习, 拓展应用

确定曲线凹凸区间和拐点的步骤:

确定曲线 $y = f(x)$ 的凹凸区间和拐点的步骤:

- (1) 确定函数 $y = f(x)$ 的定义域;
- (2) 求出二阶导数 $f(x)''$;
- (3) 求使二阶导数为零的点和使二阶导数不存在的点;
- (4) 列表讨论, 确定出曲线凹凸区间和拐点.

例 1 求曲线 $y = \ln(1 + x^2)$ 的凹凸区间及拐点

解 函数的定义域为 $(-\infty, +\infty)$

$$y' = \frac{2x}{1+x^2}$$

$$y'' = \frac{2(1+x^2 - 2x \cdot 2x)}{(1+x^2)^2} = \frac{2(1-x^2)}{(1+x^2)^2}$$

令 $y'' = 0$ 得 $x_1 = -1, x_2 = 1$. 列表讨论

x	$(-\infty, -1)$	-1	$(-1, 1)$	1	$(1, +\infty)$
y''	$-$	0	$+$	0	$-$
y	$\cap$	拐点	$\cup$	拐点	$\cap$

综上, 曲线的凹区间为 $(-1, 1)$, 凸区间为 $(-\infty, -1)$ 和 $(1, +\infty)$, 拐点有 $(-1, \ln 2)$ 和 $(1, \ln 2)$.

注记: 与函数的极值点不同, 拐点是用几何语言定义的, 是平面上的点, 必须用两个坐标来表示.

案例 1 【双蛋平衡的凹凸性原理】

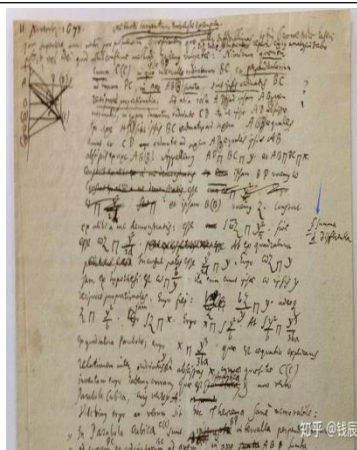
在鸡蛋的上凸弧面上撒精盐以增加局部稳定性, 双蛋平衡后把多余的精盐颗粒轻轻吹走, 表面上就看不出来了, 通过施加精盐可以把极值。

案例 2 【凸函数在进货量上的应用】

现在网络化越来越先进, 网络购物成为人们在生活中不可或缺的一部分, 于是带动了许多网店的崛起. 进货量的衡量对于网店至关过多会造成货品积压, 产生经济损失; 进货量少会造成断货, 从而增大了成本和时间的投入。那么应该如何衡量进货率? 可以根据此问题建立。

	思政元素： 现在凸函数理论已蓬勃发展为一门称其为凸分析的现代数学分支. 我们要认识到数学家琴生的贡献，并学习科学家的奉献精神. 数学在抗疫中的应用. 数学作为重要的基础科学，与生活联系密切，与文学等其他学科也有相互映衬. 引导学生在学习过程中，把知识融会贯通，欣赏数学之美. 鼓励学生做任何事情一方面要排除逻辑矛盾，另一方面要研究事物自身所固有的矛盾。
分析评价	数学作为重要的基础科学，与生活联系密切，与文学等其他学科也有相互映衬. 引导学生在学习过程中，把知识融会贯通，欣赏数学之美；鼓励学生做任何事情一方面要排除逻辑矛盾，另一方面要研究事物自身所固有的矛盾。
评作者	杨存典教授，商洛学院学生处

案例编号	AME021
案例标题	不定积分的概念及性质
案例来源	购买
内容简介	通过介绍德国著名数学家莱布尼茨对微积分的贡献,体会数学家们凡事追求卓越与完美的工匠精神;通过介绍不定积分的概念,阐明结果与原因之间的辩证统一,提升学生认识事物的科学思维和科学素养;通过建立数学模型解决实际问题,培养学生坚持不懈、勇于钻研、严谨细致、精益求精的良好品质。
关键词	原函数; 不定积分; 基本积分公式
编写时间	2022-3-1
编著者	余亚辉等, 洛阳理工学院
素材形式	文字、图片等
育人主题	阐明结果与原因之间的辩证统一,提升学生认识事物的科学思维和科学素养, 向学生传递心怀故土, 不忘根本的情怀。
素材长度	1435
案例正文	一、原函数与不定积分的概念 定义 1 如果在区间 I 上, 可导函数 $F(x)$ 的导函数为 $f(x)$, 即对任一 $x \in I$, 都有 $F'(x)=f(x) \text{ 或 } dF(x)=f(x)dx,$ 那么函数 $F(x)$ 就称为 $f(x)$ (或 $f(x)dx$) 在区间 I 上的原函数. 例如 因为 $(\sin x)'=\cos x$, 所以 $\sin x$ 是 $\cos x$ 的原函数. 又如当 $x \in (1, +\infty)$ 时, 因为 $(\sqrt{x})'=\frac{1}{2\sqrt{x}}$, 所以 $\sqrt{x}$ 是 $\frac{1}{2\sqrt{x}}$ 的原函数. 提问: $\cos x$ 和 $\frac{1}{2\sqrt{x}}$ 还有其它原函数吗? 原函数存在定理 如果函数 $f(x)$ 在区间 I 上连续, 那么在区间 I 上存在可导函数 $F(x)$, 使对任一 $x \in I$ 都有 $F'(x)=f(x).$ 简单地说就是: 连续函数一定有原函数. 两点说明: 第一, 如果函数 $f(x)$ 在区间 I 上有原函数 $F(x)$, 那么 $f(x)$ 就有无限多个原函数, $F(x)+C$ 都是 $f(x)$ 的原函数, 其中 C 是任意常数. 第二, $f(x)$ 的任意两个原函数之间只差一个常数, 即如果 $\Phi(x)$ 和 $F(x)$ 都是 $f(x)$ 的原函数, 则 $\Phi(x)-F(x)=C$ (C 为某个常数). 定义 2 在区间 I 上, 函数 $f(x)$ 的带有任意常数项的原函数称为 $f(x)$ (或 $f(x)dx$) 在区间 I 上的不定积分, 记作 $\int f(x)dx$. 其中记号 $\int$ 称为积分号, $f(x)$ 称为被积函数, $f(x)dx$ 称为被积表达式, x 称为积分变量. 莱布尼茨是 17 世纪德国著名哲学家、数学家, 其博学多识、涉猎广泛, 是历史上少见的通才, 谓之“百科全书式人物”。在数学研究领域, 他把微分学和积分学紧密联系起来, 并创造了一系列优美数学符号. 在莱布尼茨的手稿中就出现了这样的简洁的数学符号“$\int$”。



莱布尼兹及其手稿

思政元素：介绍德国著名数学家莱布尼茨对微积分所做的贡献，引导学生学习优秀科学家们凡事追求卓越与完美的工匠精神；对数学坚持不懈的钻研精神，培养学生精益求精的探索精神；数学中简单符号的创造激发学生敢于创新的精神。

根据定义，如果 $F(x)$ 是 $f(x)$ 在区间 I 上的一个原函数，那么 $F(x)+C$ 就是 $f(x)$ 的不定积分，即 $\int f(x)dx = F(x)+C$.

因而不定积分 $\int f(x)dx$ 可以表示 $f(x)$ 的任意一个原函数。

从不定积分的定义，即可知下述关系：

$$\frac{d}{dx}[\int f(x)dx] = f(x), \quad \text{或} \quad d[\int f(x)dx] = f(x)dx ;$$

又由于 $F(x)$ 是 $F'(x)$ 的原函数，所以

$$\int F'(x)dx = F(x)+C, \quad \text{或记作} \quad \int dF(x) = F(x)+C .$$

由此可见，微分运算（以记号 d 表示）与求不定积分的运算（简称积分运算，以记号 $\int$ 表示）是互逆的。当记号 $\int$ 与 d 连在一起时，或者抵消，或者抵消后差一个常数。

思政元素：不定积分的概念表明，微分运算不定积分的运算（简称积分运算是互逆的，阐明结果与原因之间的辩证统一，提升学生认识事物的科学思维和科学素养。从家国情怀层面向学生传递心怀故土，不忘根本的情怀，从自我价值观的塑造层面，想学生弘扬时常自省，方能走的跟长远。

二、基本积分表（P188）

$$(1) \int kdx = kx+C \quad (k \text{ 是常数})$$

$$(2) \int x^\mu dx = \frac{1}{\mu+1} x^{\mu+1} + C ,$$

$$(3) \int \frac{1}{x} dx = \ln|x| + C ,$$

$$(4) \int e^x dx = e^x + C ,$$

$$(5) \int a^x dx = \frac{a^x}{\ln a} + C ,$$

$$(6) \int \cos x dx = \sin x + C ,$$

$$(7) \int \sin x dx = -\cos x + C ,$$

$$(8) \int \frac{1}{\cos^2 x} dx = \int \sec^2 x dx = \tan x + C ,$$

$$(9) \int \frac{1}{\sin^2 x} dx = \int \csc^2 x dx = -\cot x + C ,$$

$$(10) \int \frac{1}{1+x^2} dx = \arctan x + C ,$$

	$(11) \int \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} dx = \arcsin x + C, \quad (12) \int \sec x \tan x dx = \sec x + C,$ $(13) \int \csc x \cot x dx = -\csc x + C, \quad (14) \int \operatorname{sh} x dx = \operatorname{ch} x + C,$ $(15) \int \operatorname{ch} x dx = \operatorname{sh} x + C.$ 例 1 $\int \frac{1}{x^3} dx = \int x^{-3} dx = \frac{1}{-3+1} x^{-3+1} + C = -\frac{1}{2x^2} + C.$ 例 2 $\int x^2 \sqrt{x} dx = \int x^{\frac{5}{2}} dx = \frac{1}{\frac{5}{2}+1} x^{\frac{5}{2}+1} + C = \frac{2}{7} x^{\frac{7}{2}} + C = \frac{2}{7} x^3 \sqrt{x} + C.$ 例 3 $\int \frac{dx}{x^{\frac{4}{3}} \sqrt{x}} = \int x^{-\frac{4}{3}} dx = \frac{x^{-\frac{4}{3}+1}}{-\frac{4}{3}+1} + C = -3x^{-\frac{1}{3}} + C = -\frac{3}{\sqrt[3]{x}} + C.$
分析评价	本案例通过介绍德国著名数学家莱布尼茨对微积分的贡献,体会数学家们凡事追求卓越与完美的工匠精神;通过介绍不定积分的概念,阐明结果与原因之间的辩证统一,提升学生认识事物的科学思维和科学素养;通过建立数学模型解决实际问题,培养学生坚持不懈、勇于钻研、严谨细致、精益求精的良好品质。
评价者	杨存典教授, 商洛学院学生处

案例编号	AME022
案例标题	不定积分的概念及性质
案例来源	原创
内容简介	通过介绍不定积分的概念，阐明结果与原因之间的辩证统一，提升学生认识事物的科学思维和科学素养；通过建立数学模型解决实际问题，培养学生坚持不懈、勇于钻研、严谨细致、精益求精的良好品质。
关键词	原函数；不定积分；基本积分公式
编写时间	2021-6-18
编著者	杨燕副教授，数学与计算机应用学院
素材形式	文字等
育人主题	创新精神
素材长度	709
案例正文	如何解读这样的一种现象呢？我们暂且把求导视为一种规则，然后原函数视为两个部分“结构性的+非结构性的(就是那个常数C)”所以我们会发现，只要原函数结构性那部分不变，那么无论常数C变成什么样子，在求导的规则作用后都会是相同的那个被积函数。 这个被积函数可以视为一个结果，而求导是达到这个结果的一个法则，因此只要原函数“结构性”那部分不变，那个常数C多大多小都没有用，结果一定是一样的.如果这样讲还是很抽象的话，不如我们举两个例子(都是原函数与被积函数的关系). 1.“故事+投资（明星阵容+顶尖特技+烧钱宣传）”与“电影票房（或口碑）”的关系. 一部电影，当你发现无限烧钱可最后也不是你要的口碑票房结果的时候，就不是投资出了问题（即原函数中的常数C，非结构那部分），而是那个“结构性”的故事出了问题，你的故事经过每一个细节的分析后（即微分、求导）就不是能够赢得票房和口碑的故事，因此也就不是一个能够赢得口碑与票房的原函数.这样的原函数，搭配多少C（投资）都无济于事.要想让结果变化，要改动的是“结构性”的故事那部分. 2.“实力(结构性的)+人脉(非结构性的)”与“成功”的关系. 当你实力有问题的情况下，无所不用其极的社交找人脉，

	最终未必能得到你想要的，因为你做的努力都在原函数的 C 上，经过求导的规则后(经得起每个细节的推敲)，这个 C 是没有用的，你的“实力”不是具有成功特质的实力，因此搭配上再多的 C 也没用.你需要改变的是“结构性”的那部分——实力，让你的实力在任何细节的推敲下(即微分、求导)都符合成功的特质。 思政元素：当你在某一方面无所不用其极而未能达到预期效果时，想想是不是“原函数”出了问题，你的努力可能只是重复了无数次的“竹篮打水”。
分析评价	通过介绍不定积分的概念，阐明结果与原因之间的辩证统一，提升学生认识事物的科学思维和科学素养；通过建立数学模型解决实际问题，培养学生坚持不懈、勇于钻研、严谨细致、精益求精的良好品质。
评价者	杨存典教授，商洛学院学生处

案例编号	AME023
案例标题	换元积分法
案例来源	原创
内容简介	换元积分法是计算不定积分的一种非常重要的方法，但也较难掌握，通过第一类换元法的学习，告诉学生学习没有捷径，唯有一步一步脚踏实地，攻坚克难，坚持不懈，才能到达成功的顶峰。通过第二类换元法的讲解，引导学生善于思考，转化思路和方式灵活处理问题，可以事半功倍。
关键词	第一类换元法（凑微分），第二类换元法
编写时间	2021-10-8
编著者	杨燕，副教授，商洛学院
素材形式	文字
育人主题	脚踏实地，攻坚克难，坚持不懈，熟能生巧
素材长度	1185
案例正文	一、第一类换元法（凑微分法） 设$f(u)$有原函数$F(u)$，$u=\varphi(x)$，且$\varphi(x)$可微，那么，根据复合函数微分法，有 $dF[\varphi(x)] = dF(u) = F'(u)du = F'[\varphi(x)]d\varphi(x) = F'[\varphi(x)]\varphi'(x)dx,$ 所以 $F'[\varphi(x)]\varphi'(x)dx = F'[\varphi(x)]d\varphi(x) = F'(u)du = dF(u) = dF[\varphi(x)]$， 因此 $\int F'[\varphi(x)]\varphi'(x)dx = \int F'[\varphi(x)]d\varphi(x)$ $= \int F'(u)du = \int dF(u) = \int dF[\varphi(x)] = F[\varphi(x)] + C.$ 即 $\int f[\varphi(x)]\varphi'(x)dx = \int f[\varphi(x)]d\varphi(x) = \left[\int f(u)du \right]_{u=\varphi(x)}$ $= [F(u) + C]_{u=\varphi(x)} = F[\varphi(x)] + C.$ 定理 1 设$f(u)$具有原函数，$u=\varphi(x)$可导，则有换元公式 $\int f[\varphi(x)]\varphi'(x)dx = \int f[\varphi(x)]d\varphi(x) = \int f(u)du = F(u) + C = F[\varphi(x)] + C.$ 被积表达式中的dx可当作变量x的微分来对待，从而微分等式$\varphi'(x)dx = du$可以应用到被积表达式中。 在求积分$\int g(x)dx$时，如果函数$g(x)$可以化为$g(x) = f[\varphi(x)]\varphi'(x)$的形式，那么 $\int g(x)dx = \int f[\varphi(x)]\varphi'(x)dx = \left[\int f(u)du \right]_{u=\varphi(x)}.$ 【例 1】 $\int 2\cos 2x dx = \int \cos 2x \cdot (2x)' dx = \int \cos 2x d(2x)$ $= \int \cos u du = \sin u + C = \sin 2x + C.$ 【例 2】 $\int \frac{1}{3+2x} dx = \frac{1}{2} \int \frac{1}{3+2x} (3+2x)' dx = \frac{1}{2} \int \frac{1}{3+2x} d(3+2x)$

$$= \frac{1}{2} \int \frac{1}{u} dx = \frac{1}{2} \ln|u| + C = \frac{1}{2} \ln|3+2x| + C.$$

【例 3】 $\int 2xe^{x^2} dx = \int e^{x^2} (x^2)' dx = \int e^{x^2} d(x^2) = \int e^u du = e^u + C = e^{x^2} + C.$

【例 4】 $\int x\sqrt{1-x^2} dx = \frac{1}{2} \int \sqrt{1-x^2} (x^2)' dx = \frac{1}{2} \int \sqrt{1-x^2} dx^2$
 $= -\frac{1}{2} \int \sqrt{1-x^2} d(1-x^2) = -\frac{1}{2} \int u^{\frac{1}{2}} du = -\frac{1}{3} u^{\frac{3}{2}} + C$
 $= -\frac{1}{3} (1-x^2)^{\frac{3}{2}} + C.$

【例 5】 $\int \tan x dx = \int \frac{\sin x}{\cos x} dx = -\int \frac{1}{\cos x} d \cos x$
 $= -\int \frac{1}{u} du = -\ln|u| + C = -\ln|\cos x| + C.$

即 $\int \tan x dx = -\ln|\cos x| + C.$

类似地可得 $\int \cot x dx = \ln|\sin x| + C.$

熟练之后, 变量代换就不必再写出了.

【例 6】 $\int \frac{1}{a^2+x^2} dx = \frac{1}{a^2} \int \frac{1}{1+(\frac{x}{a})^2} dx = \frac{1}{a} \int \frac{1}{1+(\frac{x}{a})^2} d\frac{x}{a} = \frac{1}{a} \arctan \frac{x}{a} + C.$

即 $\int \frac{1}{a^2+x^2} dx = \frac{1}{a} \arctan \frac{x}{a} + C.$

思政元素: 不定积分的第一类换元积分法是重点也是难点, 告诉学生学习没有捷径, 唯有一步一步脚踏实地, 才能到达成功的顶峰。鼓励学生大胆尝试, 勇于创新, 攻坚克难, 坚持不懈, 做一个认真刻苦, 踏实, 负责的人, 将来也一定是受社会欢迎的人. 引导学生善于思考, 灵活处理问题, 多方面思考, 可以事半功倍.

二、第二类换元法

第一类换元法, 是选择恰当的 $u = \varphi(x)$, $du = \varphi'(x)dx$ 将积分 $\int f[\varphi(x)]\varphi'(x)dx$ 变换成 $\int f(u)du$, 在找 $f(u)$ 的原函数, 即可计算出积分 $\int f[\varphi(x)]\varphi'(x)dx$ 。反过来, 对积分 $\int f(x)dx$, 也可以令 $x = \psi(t)$, 则 $dx = \psi'(t)dt$, 于是 $\int f(x)dx = \int f[\psi(t)]\psi'(t)dt$, 如果 $\int f[\psi(t)]\psi'(t)dt$ 容易求得, 且 $x = \psi(t)$ 的反函数存在, 即可求得原积分。这种方法就是第二类换元法。

定理 2 设 $x = \varphi(u)$ 在 $[\alpha, \beta]$ 严格单调且可导, $\varphi'(u) \neq 0$, 又设 $f[\varphi(u)]\varphi'(u)$ 具有原函数 $F(u)$, 则换元公式

$$\int f(x)dx = F[\varphi^{-1}(x)] + c$$

其中 $u = \varphi^{-1}(x)$ 是 $x = \varphi(u)$ 的反函数。

	证明: $\frac{d}{dx}F[\varphi^{-1}(x)] = \frac{dF}{du} \frac{du}{dx} = f[\varphi(u)]\varphi'(u) \frac{1}{\varphi'(u)} = f[\varphi(u)] = f(x)$ 【例 7】 求 $\int \frac{1}{\sqrt{x+1}} dx$。 解: 设 $t = \sqrt{x}$ $x = t^2$ $dx = 2t dt$, 代入原积分, 得 $\int \frac{1}{\sqrt{x+1}} dx = \int \frac{2t}{t+1} dt = 2 \int \frac{t+1-1}{t+1} dt = 2 \int dt - 2 \int \frac{1}{t+1} dt$ $= 2t - 2 \ln 1+t + C = 2\sqrt{x} - 2 \ln 1+\sqrt{x} + C$ 【例 8】 求 $\int \sqrt{a^2-x^2} dx (a>0)$。 解: 设 $x = a \sin t$, $-\frac{\pi}{2} < t < \frac{\pi}{2}$, 那么 $\sqrt{a^2-x^2} = \sqrt{a^2-a^2 \sin^2 t} = a \cos t$, $dx = a \cos t dt$, 于是 $\int \sqrt{a^2-x^2} dx = \int a \cos t \cdot a \cos t dt$ $= a^2 \int \cos^2 t dt = a^2 \int \frac{1+\cos 2t}{2} dt = a^2 \left(\frac{1}{2} t + \frac{1}{4} \sin 2t \right) + C.$ 因为 $t = \arcsin \frac{x}{a}$, $\sin 2t = 2 \sin t \cos t = 2 \frac{x}{a} \cdot \frac{\sqrt{a^2-x^2}}{a}$, 所以 $\int \sqrt{a^2-x^2} dx = a^2 \left(\frac{1}{2} t + \frac{1}{4} \sin 2t \right) + C = \frac{a^2}{2} \arcsin \frac{x}{a} + \frac{1}{2} x \sqrt{a^2-x^2} + C.$ 注: $\sqrt{a^2-x^2}$ 令 $x = a \sin t$ 思政元素: 换元法的实质是转化, 关键是构造元和设元, 理论依据是等量代换, 目的是变换研究对象, 将问题移至新对象的知识背景中去研究, 从而使复杂问题简单化. 引导学生在现实生活和工作中善于思考, 转化思路 and 方式, 灵活处理问题, 多方面思考, 就会得到简单的解决方法, 可以事半功倍.
分析评价	换元积分法是计算不定积分的一种非常重要的方法, 但也较难掌握, 通过第一类换元法的学习, 告诉学生学习没有捷径, 唯有一步一步脚踏实地, 攻坚克难, 坚持不懈, 才能到达成功的顶峰。通过第二类换元法的讲解, 引导学生善于思考, 转化思路 and 方式灵活处理问题, 可以事半功倍。
评价者	杨存典教授, 商洛学院学生处

案例编号	AME024
案例标题	换元积分法
案例来源	原创
内容简介	换元积分法是重点也是难点，鼓励学生大胆尝试，勇于创新，攻坚克难，坚持不懈，强调高等数学能学好的人，一定是一个认真刻苦，踏实，负责的人. 将来一定是受社会欢迎的人. 引导学生善于思考，灵活处理问题，通过数学家的故事培养学生的爱国情怀.
关键词	换元积分法；凑微分法；
编写时间	2021-10-22
编著者	赵鹏军教授，数学与计算机应用学院
素材形式	文字等
育人主题	爱国情怀与创新精神
素材长度	613
案例正文	1. 恩格斯(1820-1895)曾指出：“在一切理论成就中，未必再有什么像17世纪下半叶微积分的发明那样被看作人类精神的最高胜利了”. 微积分的发展历史曲折跌宕，撼人心灵，是培养人们正确世界观、科学方法论和对人们进行文化熏陶的极好素材. 2. 在学习不定积分的凑微分法时，引入例题，同一道例题引导学生采用直接积分法和凑微分法两种方法进行求解，培养学生逻辑推理能力以及锻炼学生的开放创新思维，反映在今后的生活工作学习中，要灵活处理问题，多方面思考，可以事半功倍. 3. 培养学生的爱国主义情怀高等数学也凝聚着我国古代自然科学的精髓，比如《九章算术》收集了西汉张苍、耿寿昌、三国的刘徽等等数学先驱的数学方法和精髓，是中国古代数学发展史的重要里程碑，是世界数学史上的宝贵遗产；被列为世界数学伟人之一的中国当代数学家华罗庚，他的“华氏定理”、“华氏不等式”、“华一王方法”等都是国际上著名的数学科研成果；证明了“哥德巴赫猜想”陈景润；还有在拓扑学和数学机械化领域做了奠基性工作的数学家吴文俊，他的“吴公式”、“吴示性类”、“吴示嵌类”至今仍被国际同行广泛引用. 这些古今中外的数学大家的事迹留给学生课后查资料并写感想，让学

	生自己树标杆. 思政元素: 换元积分法是重点也是难点, 鼓励学生大胆尝试, 勇于创新, 攻坚克难, 坚持不懈, 强调高等数学能学好的人, 一定是一个认真刻苦, 踏实, 负责的人. 将来一定是受社会欢迎的人. 引导学生善于思考, 灵活处理问题, 通过数学家的故事培养学生的爱国情怀.
分析评价	本案例通过换元积分法的学习, 鼓励学生大胆尝试, 勇于创新, 攻坚克难, 坚持不懈, 强调高等数学能学好的人, 一定是一个认真刻苦, 踏实, 负责的人. 将来一定是受社会欢迎的人. 引导学生善于思考, 灵活处理问题, 通过数学家的故事培养学生的爱国情怀.
评价者	杨存典教授, 商洛学院学生处

案例编号	AME025
案例标题	分部积分法
案例来源	原创
内容简介	求解不定积分的分部积分法,按照一定的原则分部后能实现由难到易的转化,以此告诉学生遇到困难多寻找新的解决途径,并发现总结规律,引导学生要有不畏困难迎难而上的精神。公式使用中 u 和 v 的选择很关键,否则计算会越来越复杂,最终无法求出正确结果。就如同人生道路的选择,国家民族发展道路的选择。引导学生在人生的关键时刻做出正确的选择,把握自己的人生方向。要坚定不移的跟着中国共产党走中国特色社会主义道路。
关键词	分部积分公式,多项式函数,循环积分
编写时间	2022-10-20
编著者	杨燕,副教授,商洛学院
素材形式	文字,图片
育人主题	有不畏困难迎难而上的勇气,坚定不移跟中国共产党走的信念。
素材长度	1080
案例正文	分部积分公式 设函数 $u=u(x)$ 及 $v=v(x)$ 具有连续导数. 那么, 两个函数乘积的导数公式为 $(uv)'=u'v+uv',$ 移项得 $uv'=(uv)'-u'v$. 对这个等式两边求不定积分, 得 $\int uv'dx=uv-\int u'vdx,$ 或 $\int u dv=uv-\int v du,$ (1) 这个公式称为分部积分公式. 应用 (1) 的关键是如何选取函数 $u(x)$ 和 $v(x)$, 使待求不定积分 $\int f(x)dx$ 的被积函数凑成 $f(x)=u(x)v'(x)$ 的形式, 而不定积分 $\int u'(x)v(x)dx$ 不难求出。 分部积分法是一种建立在乘积的求导法则基础上的不定积分的方法, 被积函数是两个函数的乘积, 无法用所学知识进行求解时用此方法很有效。 思政元素: 遇到困难可以寻找新的解决途径, 要善于发现总结规律, 引导学生要有不畏困难迎难而上的精神. 【例 1】 $\int x \cos x dx = \int x d \sin x = x \sin x - \int \sin x dx = x \sin x - \cos x + C.$ 【例 2】 $\int x e^x dx = \int x d e^x = x e^x - \int e^x dx = x e^x - e^x + C.$ 【例 3】 $\int x^2 e^x dx = \int x^2 d e^x = x^2 e^x - \int e^x dx^2$ $= x^2 e^x - 2 \int x e^x dx = x^2 e^x - 2 \int x d e^x = x^2 e^x - 2 x e^x + 2 \int e^x dx$ $= x^2 e^x - 2 x e^x + 2 e^x + C = e^x (x^2 - 2x + 2) + C.$ 一般地, 对下列积分可用分部积分法: (其中 $Q_{n+1}(x), P_n(x)$ 为多项式函数) $(1) \int P_n(x) e^x dx = \int P_n(x) d e^x ;$

$$(2) \int P_n(x) \sin x dx = -\int P_n(x) d \cos x ;$$

$$(3) \int P_n(x) \cos x dx = \int P_n(x) d \sin x ;$$

$$(4) \int P_n(x) (\ln x)^m dx = \int (\ln x)^m dQ_{n+1}(x) ; \quad (Q'_{n+1}(x) = P_n(x))$$

$$(5) \int P_n(x) \arcsin x dx = \int \arcsin x dQ_{n+1}(x) ;$$

$$(6) \int P_n(x) \arctan x dx = \int \arctan x dQ_{n+1}(x) ;$$

【例 4】 $\int x \arctan x dx = \frac{1}{2} \int \arctan x dx^2$

$$= \frac{1}{2} x^2 \arctan x - \frac{1}{2} \int x^2 \cdot \frac{1}{1+x^2} dx$$

$$= \frac{1}{2} x^2 \arctan x - \frac{1}{2} \int (1 - \frac{1}{1+x^2}) dx$$

$$= \frac{1}{2} x^2 \arctan x - \frac{1}{2} x + \frac{1}{2} \arctan x + C$$

【例 5】 求 $\int e^x \sin x dx$.

解 因为 $\int e^x \sin x dx = \int \sin x de^x = e^x \sin x - \int e^x d \sin x$

$$= e^x \sin x - \int e^x \cos x dx = e^x \sin x - \int \cos x de^x$$

$$= e^x \sin x - e^x \cos x + \int e^x d \cos x$$

$$= e^x \sin x - e^x \cos x + \int e^x d \cos x$$

$$= e^x \sin x - e^x \cos x - \int e^x \sin x dx$$

所以 $\int e^x \sin x dx = \frac{1}{2} e^x (\sin x - \cos x) + C$.

再求不定积分时, 若出现如下情况:

$$\int f(x) dx = G(x) + k \int f(x) dx \quad (k \neq 1) ,$$

可得 $\int f(x) dx = \frac{1}{1-k} G(x) + c$ 此类积分称为循环积分。

【例 6】 求 $\int \sec^3 x dx$.

解 因为 $\int \sec^3 x dx = \int \sec x \cdot \sec^2 x dx = \int \sec x d \tan x$

$$= \sec x \tan x - \int \sec x \tan^2 x dx = \sec x \tan x - \int \sec x (\sec^2 x - 1) dx$$

$$= \sec x \tan x - \int \sec^3 x dx + \int \sec x dx$$

$$= \sec x \tan x + \ln |\sec x + \tan x| - \int \sec^3 x dx ,$$

所以 $\int \sec^3 x dx = \frac{1}{2} (\sec x \tan x + \ln |\sec x + \tan x|) + C$.

思政元素: 利用分部积分法求解不定积分时, 需要按照一定的原则进行分部, 再利用凑微分等实现由难到易的转化, 如果一开始错误地选择了 u 和 v , 那么计算过程就会越来越复杂, 最终也不能求出

	正确结果。就如同一个人人生道路的选择，一个国家一个民族发展道路的选择。我们要在人生的关键时刻做出正确的选择，把握自己的人生方向。要坚定不移的跟着中国共产党走中国特色社会主义道路。  
分析评价	本案例主要介绍不定积分的分部积分法，按照一定的原则分部后能实现由难到易的转化，以此告诉学生遇到困难多寻找新的解决途径，并发现总结规律，引导学生要有不畏困难迎难而上的精神。公式使用中 u 和 v 的选择很关键，否则计算会越来越复杂，最终无法求出正确结果。就如同人生道路的选择，国家民族发展道路的选择。引导学生在人生的关键时刻做出正确的选择，把握自己的人生方向。要坚定不移的跟着中国共产党走中国特色社会主义道路。
评价者	杨存典教授，商洛学院学生处

案例编号	AME026
案例标题	定积分的概念
案例来源	购买
内容简介	着重介绍定积分处理问题的思想方法,引导学生在学习和工作中要用科学的方法解决问题。通过定积分概念的讲解,让学生透过现象看本质,培养学生的辩证思维习惯,在潜移默化中强调唯物辩证法在认识世界的过程中发挥的重要作用。培养学生宽阔的知识基础,健全的人格和社会责任感。
关键词	定积分,积分和,可积
编写时间	2022-3-1
编著者	余亚辉等,洛阳理工学院
素材形式	文字、图片等
育人主题	1. 用科学的方法解决问题; 2. 透过现象看本质
素材长度	1749
案例正文	一、定积分问题举例 1. 曲边梯形的面积 设 $y = f(x)$ 在区间 $[a, b]$ 上非负, 由曲线 $y = f(x)$ 及直线 $x = a$, $x = b$ 和 $y = 0$ 围成的平面图形称为曲边梯形, (如图所示) 其中曲线弧称为曲边.其面积求法如下: (1) 分割: 在区间 $[a, b]$ 内插入任意 $n-1$ 个分点: $a=x_0 < x_1 < x_2 < \cdots < x_{n-1} < x_n=b,$ 将区间 $[a, b]$ 分成 n 个小区间 (一般可以等分), 记小区间 $[x_{i-1}, x_i]$ 的长度为 Δx_i. (2)近似代替: 经过每一个分点作平行于 y 轴的直线段, 把曲边梯形分成 n 个窄曲边梯形. 在每个小区间 $[x_{i-1}, x_i]$ 上任取一点 ξ_i, 以 $[x_{i-1}, x_i]$ 为底、$f(\xi_i)$ 为高的小矩形近似替代第 i 个小曲边梯形 ($i=1, 2, \cdots, n$), 则第 i 个小曲边梯形面积为 $\Delta A_i \approx f(\xi_i) \Delta x_i \quad i=1, 2, \cdots, n$ (3) 求和: 把所有小矩形面积相加, 得整个曲边梯形面积 A 的近似值, 即: $A = \sum_{i=1}^n \Delta A_i \approx \sum_{i=1}^n f(\xi_i) \cdot \Delta x_i$

(4) 取极限:

将区间 $[a, b]$ 无限细分, 即当 $n \rightarrow \infty$ 时, 使 $\lambda = \max_{1 \leq i \leq n} \{\Delta x_i\} \rightarrow 0$, 求上述和式的极限就是曲边梯形的面积, 即: $A = \lim_{\lambda \rightarrow 0} \sum_{i=1}^n f(\xi_i) \Delta x_i$ 。

2. 变速直线运动的路程

设物体作直线运动, 已知速度 $v = v(t)$ 是 t 的连续函数, 求该物体所经过的路程。

(1) 分割 在时间段 $[T_1, T_2]$ 内任意插入 $n-1$ 个分点:

$$T_1 = t_0 < t_1 < t_2 < \cdots < t_{n-1} < t_n = T_2,$$

把 $[T_1, T_2]$ 分成 n 个小段 $[t_0, t_1], [t_1, t_2], \cdots, [t_{n-1}, t_n]$ 。

(2) 近似代替

在每个小时间段 $[t_{i-1}, t_i]$ 上任取一个时刻 ξ_i , 记 $\Delta t_i = t_i - t_{i-1}$, 把物体在时间段 $[t_{i-1}, t_i]$ 上的变速直线运动可看作以 $v(\xi_i)$ 为速度做匀速直线运动, 则物体在 $[t_{i-1}, t_i]$ 内经过的路程为

$$\Delta S_i \approx v(\xi_i) \Delta t_i \quad i = 1, 2, \cdots, n$$

(3) 求和

这 n 个小时间段内物体经过路程相加, 其和就是所求变速直线运动路程的近似值, 即

$$S = \sum_{i=1}^n S_i \approx \sum_{i=1}^n v(\xi_i) \Delta t_i;$$

(4) 取极限 若将时间段无限细分,

令 $\lambda = \max \{\Delta t_1, \Delta t_2, \dots, \Delta t_n\}$, 取极限

$$S = \lim_{\lambda \rightarrow 0} \sum_{i=1}^n v(\xi_i) \Delta t_i$$

总结: “分割, 近似求和, 取极限”

思政元素: 定积分的数学思想可以概况为“分割 (化整为小), 作积 (局部近似), 求和 (化小为整), 取极限 (精确化)”。除了纯粹的数学解释, 要在思想上启发学生, 遇到复杂问题时, 可以将问题尽可能切分成许多小问题, 因为再复杂的事情都是由简单的事情

组合起来的，我们要学会用智慧去分解它，理性和平地去做事。

二、定积分定义

抛开上述问题的具体意义，抓住它们在数量关系上共同的本质与特性加以概括，就抽象出下述定积分的定义。

定义 1 设函数 $f(x)$ 在 $[a, b]$ 上有界，在 $[a, b]$ 中任意插入 $n-1$ 个分点

$$a = x_0 < x_1 < x_2 < \dots < x_{n-1} < x_n = b$$

把区间 $[a, b]$ 分成 n 个小区间 $[x_0, x_1], [x_1, x_2], \dots, [x_{n-1}, x_n]$ ，各小段区间的长依次为 $\Delta x_1 = x_1 - x_0, \Delta x_2 = x_2 - x_1, \dots, \Delta x_n = x_n - x_{n-1}$ 。在每个小区间 $[x_{i-1}, x_i]$ 上任取一点 $\xi_i \in (x_{i-1} \leq \xi_i \leq x_i)$ ，作函数 $f(\xi_i)$ 与小区间数 x_i 的乘积

$$f(\xi_i)\Delta x_i (i=1, 2, \dots, n), \text{ 并作和 } S = \sum_{i=1}^n f(\xi_i)\Delta x_i$$

记 $\lambda = \max\{\Delta x_1, \Delta x_2, \dots, \Delta x_n\}$ ，如果不对 $[a, b]$ 怎样分法，也不论小区间 $[x_{i-1}, x_i]$ 上点 ξ_i 如何取法。只要 $\lambda \rightarrow 0$ 时，极限

$$I = \lim_{\lambda \rightarrow 0} \sum_{i=1}^n f(\xi_i)\Delta x_i$$

都存在，则称 $f(x)$ 在区间 $[a, b]$ 上可积，极限值 I 称为函数 $f(x)$ 在区间 $[a, b]$ 上的定积分（简记积分）记作 $\int_a^b f(x)dx$ 即

$$I = \int_a^b f(x)dx = \lim_{\lambda \rightarrow 0} \sum_{i=1}^n f(\xi_i)\Delta x_i$$

其中 $f(x)$ 叫做被积函数， $f(x)dx$ 叫做被积表达式， x 叫做积分变量， $[a, b]$

叫做积分区间， a, b 分别称为积分下限、积分上限， $\sum_{i=1}^n f(\xi_i)\Delta x_i$ 称为 $f(x)$ 的积分和。

思政元素：通过定积分概念的讲解，让学生透过现象看本质，抓住现象背后蕴含的客观规律，培养学生的辩证思维习惯，在潜移默化中强调唯物辩证法在认识世界的过程中发挥的重要作用。

注意：

1、定积分只与被积函数，积分区间有关，而与积分变量无关。即：

$$\int_a^b f(x)dx = \int_a^b f(t)dt = \int_a^b f(u)du$$

2、' $\varepsilon - \delta$ ' 说法: $\forall \varepsilon > 0 \exists \delta > 0$, 使得无论区间 $[a, b]$ 怎样分, 区间 $[x_{i-1}, x_i]$ 上点 ξ_i 如何取, 只要 $\lambda < \delta$ 时 总有 $|\sum_{i=1}^n f(\xi_i)\Delta x_i - I| < \varepsilon$, 则称数 I 为 $f(x)$ 在 $[a, b]$ 上的定积分。

3、根据定积分的定义，曲边梯形的面积为 $A = \int_a^b f(x)dx$ 。

变速直线运动的路程为 $S = \int_{T_1}^{T_2} v(t)dt$ 。

	4、如果函数 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上的定积分存在, 我们就说 $f(x)$ 在区间 $[a,b]$ 上可积. 函数 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上满足什么条件时, $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上可积呢? 定理 1 设 $f(x)$ 在区间 $[a,b]$ 上连续, 则 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上可积. 定理 2 设 $f(x)$ 在区间 $[a,b]$ 上有界, 且只有有限个间断点, 则 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上可积. 定理 3 设 $f(x)$ 在区间 $[a,b]$ 上单调, 则 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上可积. 例 1 利用定积分定义计算 $\int_0^1 x^2 dx$ 解 由于 $f(x) = x^2$ 在区间 $[0, 1]$ 连续, 所以 $f(x) = x^2$ 在 $[0, 1]$ 可积, 且 $\int_0^1 x^2 dx$ 与区间的分法和点 ξ_i 取法无关。为方便计算, 把 区间 $[0, 1]$ 分为 n 等分, 其分点为 $\frac{i}{n} (i=1, 2, \dots, n)$, 每个小区间的长度 $\Delta x_i = \frac{1}{n} (i=1, 2, \dots, n)$, 取 $\xi_i = \frac{i}{n}$ $f(\xi_i)\Delta x_i = (\frac{i}{n})^2 \frac{1}{n}$, 作和式: $\sum_{i=1}^n f(\xi_i)\Delta x_i = \sum_{i=1}^n (\frac{i}{n})^2 \frac{1}{n} = \frac{1}{n^3} [1^2 + 2^2 + \dots + n^2] = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6n^3}$ 当对区间 $[0, 1]$ 等分时, $\lambda \rightarrow 0$ 时, $n \rightarrow \infty$, 由定积分的定义有 $\int_0^1 x^2 dx = \lim_{\lambda \rightarrow 0} \sum_{i=1}^n f(\xi_i)\Delta x_i = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n(n+1)(2n+1)}{6n^3} = \frac{1}{3}$
分析评价	本案例着重介绍定积分处理问题的思想方法, 引导学生在学习和工作中要用科学的方法解决问题。通过定积分概念的讲解, 让学生透过现象看本质, 培养学生的辩证思维习惯, 在潜移默化中强调唯物辩证法在认识世界的过程中发挥的重要作用。培养学生宽阔的知识基础, 健全的人格和社会责任感。
评价者	杨存典教授, 商洛学院学生处

案例编号	AME027
案例标题	无穷限的反常积分
案例来源	购买
内容简介	通过讲解无穷限的反常积分的定义，指出定义中蕴含的方法论意义——“化未知为已知”，“退一步海阔天空”，培养学生灵活解决问题的工作和学习习惯，以及执着的探索精神和孜孜不倦的科学精神。
关键词	无穷限的反常积分，广义积分
编写时间	2022-3-1
编著者	余亚辉等，洛阳理工学院
素材形式	文字、图片等
育人主题	“化未知为已知”，“退一步海阔天空”
素材长度	1061
案例正文	前面所讨论的定积分均是有界函数在有限区间上的积分。有时我们也会遇到有界函数在无穷区间上的积分，称之为无穷积分；无界函数在有限区间上的积分，称之为瑕积分，这两种积分统称为广义积分。 1、无穷限的反常积分 定义 1 设函数 $f(x)$ 在区间 $[a, +\infty)$ 上连续，取 $b > a$. 如果极限 $\lim_{b \rightarrow +\infty} \int_a^b f(x) dx$ 存在，则称此极限为函数 $f(x)$ 在无穷区间 $[a, +\infty)$ 上的反常积分，记作 $\int_a^{+\infty} f(x) dx$，即 $\int_a^{+\infty} f(x) dx = \lim_{b \rightarrow +\infty} \int_a^b f(x) dx .$ 这时也称反常积分 $\int_a^{+\infty} f(x) dx$ 收敛. 如果上述极限不存在，函数 $f(x)$ 在无穷区间 $[a, +\infty)$ 上的反常积分 $\int_a^{+\infty} f(x) dx$ 就没有意义，此时称反常积分 $\int_a^{+\infty} f(x) dx$ 发散. 类似地，设函数 $f(x)$ 在区间 $(-\infty, b]$ 上连续，如果极限 $\lim_{a \rightarrow -\infty} \int_a^b f(x) dx \quad (a < b)$ 存在，则称此极限为函数 $f(x)$ 在无穷区间 $(-\infty, b]$ 上的反常积分，记作 $\int_{-\infty}^b f(x) dx$，即 $\int_{-\infty}^b f(x) dx = \lim_{a \rightarrow -\infty} \int_a^b f(x) dx .$ 这时也称反常积分 $\int_{-\infty}^b f(x) dx$ 收敛. 如果上述极限不存在，则称反常积分 $\int_{-\infty}^b f(x) dx$ 发散.

设函数 $f(x)$ 在区间 $(-\infty, +\infty)$ 上连续, 如果反常积分

$$\int_{-\infty}^0 f(x)dx \text{ 和 } \int_0^{+\infty} f(x)dx$$

都收敛, 则称上述两个反常积分的和为函数 $f(x)$ 在无穷区间 $(-\infty, +\infty)$ 上的反常积分, 记作 $\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)dx$, 即

$$\begin{aligned}\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)dx &= \int_{-\infty}^0 f(x)dx + \int_0^{+\infty} f(x)dx \\ &= \lim_{a \rightarrow -\infty} \int_a^0 f(x)dx + \lim_{b \rightarrow +\infty} \int_0^b f(x)dx.\end{aligned}$$

这时也称反常积分 $\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)dx$ 收敛. 如果上式右端有一个反常积分发散, 则称反常积分 $\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)dx$ 发散.

思政元素: 无穷限的反常积分, 对于积分上限和积分下限为无穷的问题, 采取的方法是“退而求其次”, 先考虑可以求解的定积分, 然后再利用极限这个工具得到需要的无穷限积分。指出该定义中所蕴含的方法论意义——“化未知为已知”, “退一步海阔天空”, 培养学生灵活解决问题的工作学习习惯。

2. 无穷积分的计算:

如果 $F(x)$ 是 $f(x)$ 的原函数, 则

$$\begin{aligned}\int_a^{+\infty} f(x)dx &= \lim_{b \rightarrow +\infty} \int_a^b f(x)dx = \lim_{b \rightarrow +\infty} [F(x)]_a^b \\ &= \lim_{b \rightarrow +\infty} F(b) - F(a) = \lim_{x \rightarrow +\infty} F(x) - F(a).\end{aligned}$$

可采用如下简记形式:

$$\int_a^{+\infty} f(x)dx = [F(x)]_a^{+\infty} = \lim_{x \rightarrow +\infty} F(x) - F(a).$$

类似地 $\int_{-\infty}^b f(x)dx = [F(x)]_{-\infty}^b = F(b) - \lim_{x \rightarrow -\infty} F(x),$

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)dx = [F(x)]_{-\infty}^{+\infty} = \lim_{x \rightarrow +\infty} F(x) - \lim_{x \rightarrow -\infty} F(x).$$

例 1 计算反常积分 $\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{1+x^2} dx$.

$$\text{解 } \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{1+x^2} dx = [\arctan x]_{-\infty}^{+\infty} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \arctan x - \lim_{x \rightarrow -\infty} \arctan x = \frac{\pi}{2} - (-\frac{\pi}{2}) = \pi.$$

例 2 计算反常积分 $\int_0^{+\infty} te^{-pt} dt$ (p 是常数, 且 $p > 0$).

$$\begin{aligned}\text{解 } \int_0^{+\infty} te^{-pt} dt &= [\int te^{-pt} dt]_0^{+\infty} = [-\frac{1}{p} \int tde^{-pt}]_0^{+\infty} \\ &= [-\frac{1}{p} te^{-pt} + \frac{1}{p} \int e^{-pt} dt]_0^{+\infty} \\ &= [-\frac{1}{p} te^{-pt} - \frac{1}{p^2} e^{-pt}]_0^{+\infty}.\end{aligned}$$

案例正文	$= \lim_{t \rightarrow +\infty} \left[-\frac{1}{p} t e^{-pt} - \frac{1}{p^2} e^{-pt} \right] + \frac{1}{p^2} = \frac{1}{p^2}$ 提示: $\lim_{t \rightarrow +\infty} t e^{-pt} = \lim_{t \rightarrow +\infty} \frac{t}{e^{pt}} = \lim_{t \rightarrow +\infty} \frac{1}{p e^{pt}} = 0$. 例 3 讨论反常积分 $\int_a^{+\infty} \frac{1}{x^p} dx$ ($a > 0$) 的敛散性. 解 当 $p=1$ 时, $\int_a^{+\infty} \frac{1}{x^p} dx = \int_a^{+\infty} \frac{1}{x} dx = [\ln x]_a^{+\infty} = +\infty$. 当 $p < 1$ 时, $\int_a^{+\infty} \frac{1}{x^p} dx = \left[\frac{1}{1-p} x^{1-p} \right]_a^{+\infty} = +\infty$. 当 $p > 1$ 时, $\int_a^{+\infty} \frac{1}{x^p} dx = \left[\frac{1}{1-p} x^{1-p} \right]_a^{+\infty} = \frac{a^{1-p}}{p-1}$. 因此, 当 $p > 1$ 时, 此反常积分收敛, 其值为 $\frac{a^{1-p}}{p-1}$; 当 $p \leq 1$ 时, 此反常积分发散. 例 4. 讨论无穷积分 $\int_{-\infty}^{+\infty} f(x) dx$ 是否与极限 $\lim_{a \rightarrow +\infty} \int_{-a}^a f(x) dx$ 相等. 解: 不妨设 $f(x) = x$, 则有 $\lim_{a \rightarrow +\infty} \int_{-a}^a f(x) dx = \lim_{a \rightarrow +\infty} \int_{-a}^a x dx = \lim_{a \rightarrow +\infty} \left[\frac{x^2}{2} \right]_{-a}^a = 0,$ 而 $\int_0^{+\infty} f(x) dx = \lim_{b \rightarrow +\infty} \int_0^b x dx = \lim_{b \rightarrow +\infty} \left[\frac{x^2}{2} \right]_0^b = +\infty$, 故 $\int_{-\infty}^{+\infty} f(x) dx$ 发散. 所以 $\int_{-\infty}^{+\infty} f(x) dx$ 与 $\lim_{a \rightarrow +\infty} \int_{-a}^a f(x) dx$ 并不是同一概念, 一个是无穷积分, 一个是定积分的极限. 思政元素:形式相近数学式子, 含义可能完全不同, 不能通过直观看到的就做判断, 要利用所学的知识去探求内在的本质。引导学生要有执着的探索精神和孜孜不倦的科学精神。
分析评价	本案例通过讲解无穷限的反常积分的定义, 指出定义中蕴含的方法论意义——“化未知为已知”, “退一步海阔天空”, 培养学生灵活解决问题的工作和学习习惯, 以及执着的探索精神和孜孜不倦的科学精神。
评 价 者	杨存典教授, 商洛学院学生处

案例编号	AME028
案例标题	定积分的应用
案例来源	购买
内容简介	定积分作为从实际问题中抽象出来的概念，其处理问题的思想方法在实际中应用广泛，本节主要讨论定积分在几何方面的简单应用，通过本节学习，希望同学们能进一步深入理解定积分的思想，领会其包含的化整为零，各个击破再积零为整，整体解决的辩证统一哲学思想。
关键词	定积分，微元法，平面图形的面积
编写时间	2022-3-1
编著者	余亚辉等，洛阳理工学院
素材形式	文字、图片等
育人主题	化整为零，积零为整，培养学生不畏艰难不断探索的科学精神
素材长度	1439
案例正文	定积分是求某种总量的数学模型，它在几何学、物理学等方面有着十分广泛的应用，正是如此，积分学才不断发展和完善。 定积分的元素法 回忆曲边梯形的面积：设 $y=f(x) \geq 0 (x \in [a, b])$。如果说积分 $A = \int_a^b f(x)dx$ 是以 $[a, b]$ 为底的曲边梯形的面积，则积分上限函数 $A(x) = \int_a^x f(t)dt$ 就是以 $[a, x]$ 为底的曲边梯形的面积。而微分 $dA(x)=f(x)dx$ 表示点 x 处以 dx 为宽的小曲边梯形面积的近似值 $\Delta A \approx f(x)dx$，$f(x)dx$ 称为曲边梯形的面积元素。 以 $[a, b]$ 为底的曲边梯形的面积 A 就是以面积元素 $f(x)dx$ 为被积表达式，以 $[a, b]$ 为积分区间的定积分：$A = \int_a^b f(x)dx$。 一般情况下，为求某一量 U，先将此量分布在某一区间 $[a, b]$ 上，分布在 $[a, x]$ 上的量用函数 $U(x)$ 表示，再求这一量的元素 $dU(x)$，设 $dU(x)=u(x)dx$，然后以 $u(x)dx$ 为被积表达式，以 $[a, b]$ 为积分区间求定积分即得 $U = \int_a^b f(x)dx.$ 用这一方法求一量的值的方法称为微元法(或元素法)。 思政元素：微元法的思想本质上蕴含了化整为零，各个击破再积零为整，整体解决的辩证统一哲学思想。 一、平面图形的面积 1、直角坐标情形 由定积分的几何意义：$A = \int_a^b f(x)dx$；

若平面图形由曲线 $y=f(x)$ 与 $y=g(x)$ ，且 $f(x)>g(x)$ ，直线 $x=a$ 与 $x=b(a<b)$ 所围成，则面积微元为 $dA=[f(x)-g(x)]dx$ ，于是平面图形的面积为

$$A=\int_a^b[f(x)-g(x)]dx;$$

若平面图形由曲线 $x=\varphi(y), x=\psi(y), (\varphi(y)>\psi(y))$ ，直线 $y=c$ 与 $y=d(c<d)$ 所围成，则其面积微元 $dA=[\varphi(y)-\psi(y)]dy$ ，平面图形的面积为

$$A=\int_c^d[\varphi(y)-\psi(y)]dy$$

例 1 计算抛物线 $y=x^2, y=x$ 所围成的图形的面积.

$$\text{解 } A=\int_0^1(x-x^2)dx=[\frac{x^2}{2}-\frac{1}{3}x^3]_0^1=\frac{1}{6}.$$

例 2 计算抛物线 $y^2=2x$ 与直线 $y=x-4$ 所围成的图形的面积.

解 (1)画图.

(2)确定在 y 轴上的投影区间: $[-2, 4]$.

(3)确定左右曲线: $\varphi_{\pm}(y)=\frac{1}{2}y^2, \varphi_{\mp}(y)=y+4$.

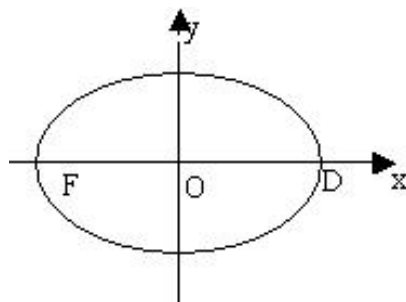
(4)计算积分

$$S=\int_{-2}^4(y+4-\frac{1}{2}y^2)dy=[\frac{1}{2}y^2+4y-\frac{1}{6}y^3]_{-2}^4=18.$$

当曲边梯形的曲边由参数方程 $\begin{cases} x=\varphi(t) \\ y=\psi(t) \end{cases}$ 给出，其中 $x=\varphi(t)$ 满足 $\varphi(\alpha)=a, \varphi(\beta)=b$ ， $\varphi(t)$ 在 $[\alpha, \beta]$ (或 $[\beta, \alpha]$) 上又连续的导数， $y=\psi(t)$ 连续，则根据曲边梯形的面积公式和定积分的换元法知，由 $y=f(x)$ ，直线 $x=a, x=b$ 及 x 轴所围成图形的面积为

$$A=\int_a^b y(x)dx=\int_{\alpha}^{\beta} \psi(t)\varphi'(t)dt$$

例 3 求椭圆 $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$ 所围成的图形的面积.



解 设整个椭圆的面积是椭圆在第一象限部分的四倍，即 $A=4A_1$ ，椭圆的参数方程为: $x=a\cos t, y=b\sin t$ ，于是

$$\begin{aligned} S &= 4\int_0^a ydx = 4\int_{\frac{\pi}{2}}^0 b\sin t d(a\cos t) \\ &= -4ab\int_{\frac{\pi}{2}}^0 \sin^2 t dt = 2ab\int_0^{\frac{\pi}{2}} (1-\cos 2t)dt \\ &= 2ab\cdot\frac{\pi}{2} = ab\pi. \end{aligned}$$

2 极坐标系下平面图形的面积

曲边扇形及曲边扇形的面积元素:

由曲线 $r=r(\theta)$ 及射线 $\theta=\alpha, \theta=\beta$ ($\alpha < \beta$) 围成的图形称为曲边扇形,如何求此扇形的面积呢?

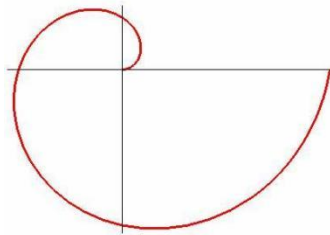
采用微元法,取极角 θ 为积分变量,其积分区间为 $[\alpha, \beta]$, 任取 $[\alpha, \beta]$ 内小区间 $[\theta, \theta + d\theta]$, 其相应的小区边扇形的面积用半径为 $r(\theta)$, 中心角为 $d\theta$ 的小圆扇形来近似代替, 得面积元素为:

$$dA = \frac{1}{2} [r(\theta)]^2 d\theta.$$

所以, 所求曲边扇形的面积为

$$A = \int_{\alpha}^{\beta} dA = \int_{\alpha}^{\beta} \frac{1}{2} [r(\theta)]^2 d\theta = \frac{1}{2} \int_{\alpha}^{\beta} r^2(\theta) d\theta.$$

例 4. 计算阿基米德螺线 $r=a\theta$ ($a>0$) 上相应于 θ 从 0 变到 2π 的一段弧与极轴所围成的图形的面积.



$$\text{解: } S = \int_0^{2\pi} \frac{1}{2} (a\theta)^2 d\theta = \frac{1}{2} a^2 \left[\frac{1}{3} \theta^3 \right]_0^{2\pi} = \frac{4}{3} a^2 \pi^3.$$

例 5. 计算心形线 $\rho=a(1+\cos\theta)$ ($a>0$) 所围成的图形的面积.

$$\text{解: } S = 2 \int_0^{\pi} \frac{1}{2} [a(1+\cos\theta)]^2 d\theta = a^2 \int_0^{\pi} \left(\frac{1}{2} + 2\cos\theta + \frac{1}{2} \cos 2\theta \right) d\theta$$

$$= a^2 \left[\frac{3}{2} \theta + 2\sin\theta + \frac{1}{4} \sin 2\theta \right]_0^{\pi} = \frac{3}{2} a^2 \pi.$$

练习: 求由圆 $r=2\cos\theta, r=1$ 所围成的图形的面积

解: 由对称性知, 所求阴影部分面积为 ox 轴上方阴影部分面积的 2 倍。

面积元素为

$$dA_1 = \frac{1}{2} [(2\cos\theta)^2 - 1^2] d\theta$$

所以所求的面积为

$$A = 2A_1 = 2 \int_0^{\frac{\pi}{3}} dA_1 = 2 \int_0^{\frac{\pi}{3}} \frac{1}{2} [(2\cos\theta)^2 - 1^2] d\theta$$

	$= \int_0^{\frac{\pi}{3}} (4 \cos^2 \theta - 1) d\theta = \int_0^{\frac{\pi}{3}} (1 + \cos 2\theta) d\theta = \frac{\pi}{3} + \frac{\sqrt{3}}{2}$ 思政元素：用微元法计算平面图形的面积时，要鼓励学生大胆猜测，分析本质，善于总结规律，实现从特殊到一般，再由一般到特殊解决具体问题。培养学生在学习工作中要采用科学的思维方式，学习会取得事半功倍的效果。
分析评价	定积分作为从实际问题中抽象出来的概念，其处理问题的思想方法在实际中应用广泛，本节主要讨论定积分在几何方面的简单应用，通过本节学习，希望同学们能进一步深入理解定积分的思想，领会其包含的化整为零，各个击破再积零为整，整体解决的辩证统一哲学思想.
评 价 者	杨存典教授，商洛学院学生处

案例编号	AME029
案例标题	微分方程的基本概念
案例来源	购买
内容简介	先由经典的马尔萨斯人口模型和高铁的制动模型出发,创设情境,激发学生的探索欲望,同时在两个模型的基础上,恰当地融入思政元素,引导学生树立学好数学的信心,增强学生的民族自豪感。
关键词	几何意义;初值问题;微分方程的阶
编写时间	2022-3-1
编著者	余亚辉等,洛阳理工学院
素材形式	文字、图片等
育人主题	树立学好数学的信心,增强学生的民族自豪感
素材长度	2880
案例正文	一、结合实际,情景导入 在日常生活和科学技术问题中,往往需要寻找与问题有关的变量之间的函数关系,且需要对函数关系加以研究.可是,许多几何、物理、经济和其他领域所提供的实际问题,即使经过适当的分析、处理和适当的简化后,能列出的也常常只能是含有未知函数及其导数的关系式,这种关系式就是所谓的微分方程. 导入1【人口问题】 2010年11月进行的全国第六次人口普查的数据显示,至2010年11月1日,中国内地总人口为13.40亿人;年均增长率0.57%(2000—2010年). 出生率方面,2000—2010年年均增长0.57%,较之上一个十年的1.07%,年均增长率下降接近一半.同时,我国“总和生育率”偏低,中国60岁及以上老人比例达到13.26%,已属于“轻度老龄化”.基于以上数据统计,2015年10月,中共十八届中央委员会第五次全体会议公报指出:促进人口均衡发展,坚持计划生育的基本国策,完善人口发展战略,全面实施一对夫妇可生育两个孩子政策,积极开展应对人口老龄化行动.

案例正文	全面认识和把握人类人口增长的规律对国家的长久发展起着至关重要的作用,人口增长规律可借助微分方程建立数学模型来研究,其中最重要的一类人口模型是 1798 年,英国学者马尔萨斯在分析了一百多年人口统计资料之后,提出的 Malthus 模型: 假设人口的相对增长率为常数 r, 设 t 时刻人口数为 $N(t)$, 则人口增长速度 $\frac{dN}{dt}$ 与人口总量 $N(t)$ 成正比, 得如下关系式 $\frac{dN}{dt} = rN \quad (1-1)$ 假设 $t = t_0$ 时刻的人口为 N_0, 于是建立 Malthus 模型 $\begin{cases} \frac{dN}{dt} = rN \\ N(t_0) = N_0 \end{cases} \quad (1-2)$ 马尔萨斯模型适合短期的种群数量的预测,对长期种群数量的预测,预测结果可能存在较大的误差,因此需要建立其他数学模型来解决. 思政元素: 2016 年 4 月 15 日,李克强总理考察北京大学数学科学学院时特别强调“数学特别是理论数学是我国科学研究的重要基础”. 导入 2【列车制动问题】 高铁被誉为中国新四大发明之一. 因高铁的运行速度快,对制动系统的性能要求较高,高铁列车上安装有多套制动装置——制动风翼、电磁制动系统、空气制动系统、摩擦制动系统等. 在一段直线轨道上,某高铁列车正以 $v_0 = 288\text{km/h}$ 的速度匀速行使,列车长突然接到通知,前方 5km 处道路出现异常,需要减速停车. 列车长接到通知后,经过 $t_1 = 2.5\text{s}$ 将制动风翼打开,高铁列车获得加速度 $a_0 = -0.5\text{m/s}^2$, 减速 $t_2 = 40\text{s}$ 后,列车长再将电磁制动系统打开,此时高铁列车获得加速度 $a_2 = -1.2\text{m/s}^2$, 问列车经过多长时间能停住以及列车停车处距离异常处的距离? 解 设列车长将电磁制动系统打开后,列车在制动阶段运动规律的函数为 $s = s(t)$, 则列车长将电磁制动系统打开前的速度和位移 $v_1 = v_0 + a_1 t_2 = 60\text{m/s}$ $s_1 = v_0 t_1 + \left(v_0 t_2 + \frac{1}{2} a_1 t_2^2 \right) = 3000\text{m}$ 列车长将电磁制动系统打开后,列车运动规律的函数 $s = s(t)$ 应满足关系式
------	---



案例正文	$\frac{d^2s}{dt^2} = -1.2 \quad (1-3)$
	此外，未知函数 $s = s(t)$ 还应满足下列条件：
	$t = 0 \text{ 时}, s = 0, v = \frac{ds}{dt} = 60 \quad (1-4)$
	把 (1-3) 式两端积分一次，得
	$v = \frac{ds}{dt} = -1.2t + C_1 \quad (1-5)$
	再积分一次，得
	$s = -0.6t^2 + C_1t + C_2 \quad (1-6)$
	把条件 (1-4) 代入 (1-5) 及 (1-6) 式得 $C_1 = 60$ ， $C_2 = 0$ 。 从而得
	$v = -1.2t + 60 \quad (1-7)$
	$s = -0.6t^2 + 60t \quad (1-8)$
	在 (1-7) 式中令以 $v = 0$ ，得列车从开始制动到完全停住的时间 $t = 50s$ 。再把 $t = 50$ 代入 (1-8) 式，得到列车在制动阶段行驶的路程 $s = 1500m$ 。于是，列车停车处距离异常处的距离为 500m。 观察 (1-1) 和 (1-3)，这两个方程具有什么共同特点？
	思政元素： 介绍中国高铁的发展征程及其孕育的高铁精神的内涵。
	二、归纳总结，形成概念
	归纳总结： 上述例子中的关系式 (1-1) 和 (1-3) 都含有未知函数的导数，它们都是微分方程。
	定义 1 一般地，凡表示未知函数、未知函数的导数与自变量之间的关系的方程，称为微分方程，有时也简称方程。
	定义 2 微分方程中所出现的未知函数的最高阶导数的阶数，称为微分方程的阶。
	例如方程 $x^3y''' + x^2y'' - 4xy' = 3x^2$ 是三阶微分方程；方程 $y^{(4)} - 4y''' + 10y'' - 12y' + 5y = \sin x$ 是四阶微分方程。
	一般地， n 阶微分方程的形式是 $F(x, y, y', \dots, y^{(n)}) = 0$ 。
	注 在方程中， $y^{(n)}$ 是必须出现的， $x, y, y', \dots, y^{(n-1)}$ 等变量则可以不出现。
	由前面的例子我们看到，在研究某些实际问题时，首先要建立微分方程，然后找出满足微分方程的函数，也就是说，找出这样的函数，把它代入微分方程能使该方程成为恒等式，这个函数就叫做该微分方程的解。
	对 n 阶微分方程而言，如果在区间 I 上有 n 阶连续导数 $y = \varphi(x)$ ，使得当 $x \in I$ 时，有
	$F[x, \varphi(x), \varphi'(x), \dots, \varphi^{(n)}(x)] = 0$

案例正文	那么函数 $y = \varphi(x)$ 就称为微分方程 $F(x, y, y', \dots, y^{(n)}) = 0$ 在区间 I 上的解. 定义 3 如果微分方程的解中含有任意常数, 且任意常数的个数与微分方程的阶数相同, 这样的解是微分方程的通解如 (1-6) 式. 注 任意常数是相互独立的, 也就是说, 它们不能合并而使得任意常数的个数减少. 例如, 对函数 $y = x^2 + C_1x - C_2x$ 而言, 其形式上含有两个任意常数, 而实际上只有一个任意常数. 因为 $C_1 - C_2$ 可合并成一个任意常数 C, 即 $y = x^2 + Cx$ 设微分方程中的未知函数为 $y = \varphi(x)$, 如果微分方程是一阶的, 通常用来确定任意常数的条件是 $x = x_0$ 时, $y = y_0$, 或写成 $y _{x=x_0} = y_0$, 其中 x_0、y_0 都是给定的值; 如果微分方程是二阶的, 通常用来确定任意常数的条件是 $x = x_0$ 时, $y = y_0$, $y' = y'_0$ 或写成 $y _{x=x_0} = y_0$, $y' _{x=x_0} = y'_0$, 其中 x_0, y_0 和 y'_0 都是给定的值. 上述这种条件叫做初值条件, 如 (1-4) 定义 4 确定了通解中的任意常数以后, 就得到微分方程的特解, 如 (1-7) 式、(1-8) 式. 定义 5 求微分方程 $y' = f(x, y)$ 满足初值条件 $y _{x=x_0} = y_0$ 的特解这样的问题, 称为一阶微分方程的初值问题, 记作 $\begin{cases} y' = f(x, y) \\ y _{x=x_0} = y_0 \end{cases}$ 定义 6 微分方程的解的图形是一条曲线, 称为微分方程的积分曲线. 一阶微分方程初值问题 (1-9) 式的几何意义, 就是求微分方程通过点 (x_0, y_0) 的那条积分曲线. 二阶微分方程的初值问题 $\begin{cases} y'' = f(x, y, y') \\ y _{x=x_0} = y_0, y' _{x=x_0} = y'_0 \end{cases}$ 的几何意义, 就是求微分方程通过点 (x_0, y_0) 且在该点处的切线斜率为 y'_0 的那条积分曲线. 例 1 验证: 函数 $x = C_1 \cos kt + C_2 \sin kt$ 是微分方程 $\frac{d^2x}{dt^2} + k^2x = 0$ 的解
-------------	---

案例正文	解 求出函数 (1-10) 的导数 $\frac{dx}{dt} = -kC_1 \sin kt + kC_2 \cos kt$ $\frac{d^2x}{dt^2} = -k^2 (C_1 \cos kt + kC_2 \sin kt)$ 把函数 (1-10) 及其二阶导数代入方程 (1-11) 后成为一个恒等式, 因此函数 (1-10) 是微分方程 (1-11) 的解. 三、巩固练习, 拓展应用 案例 1 【SI 模型】 2020 年年初, 一场突如其来的疫情打破了人们平静的生活, 为了阻断新型冠状病毒的传播, 全中国人民高度响应党中央的号召, 全民居家隔离并持续关注新冠病毒的蔓延趋势和传播情况. 那么病毒传染是一个什么过程? 其蔓延趋势如何? 依据数理统计我国的专家和学者通过建立 SEIR 传染病模型, 对病毒的传播过程进行了细致的研究, 这对后续病毒传播的预测和防范起到了有力的理论支持, 也是我们打赢这场疫情保卫战的强有力的理论武器. 事实上, SEIR 传染病模型是微分方程理论中重要的研究内容, 其中, 这类模型中最简单的一种模型叫 SI 模型. Modified SEIR and AI prediction of the epidemics trend of COVID-19 in China under public health interventions Zieng Yang ^{1,2}, Zhiqi Zeng ¹, Ke Wang ³, Seok-San Wong ^{1,4}, Wenhua Liang ¹, Marc Zanin ^{1,4}, Peng Liu ⁵, Xudong Cao ⁵, Zhongqiang Gao ⁵, Zhitong kai ¹, Jingyi Liang ¹, Xiaojing Liu ¹, Shiyue Li ¹, Yimin Li ¹, Feng Ye ¹, Weiwei Guan ¹, Yilan Yang ⁶, Fei Li ⁶, Shengmai Luo ⁶, Yuqi Xie ¹, Bin Liu ⁷, Zhoufang Wang ¹, Shaobo Zhang ³, Yaonan Wang ³, Nanshan Zhong ¹, Jianming He ¹ We modified the original SEIR-equation to account for a dynamic Susceptible [S] and Exposed [E] population size by introducing the move-in, In(s) and move-out, Out(s) parameters. Conceptually, the modified model is shown as: The base model is as follows: $\frac{dS(t)}{dt} = -\frac{\lambda S(t) I(t)}{N} \quad [1]$ $\frac{dE(t)}{dt} = \frac{\lambda S(t) I(t)}{N} - \sigma E(t) \quad [2]$ $\frac{dI(t)}{dt} = \sigma E(t) - \gamma I(t) \quad [3]$ $\frac{dR(t)}{dt} = \gamma I(t) \quad [4]$ 模型假设 (1) 在疾病传染期内所考察地区的总人数 N 不变, 即不考虑生死, 也不考虑迁移; (2) 总人群中分为易感染者 (健康) 和感染者 (病人), 在时刻 t 这两类人在总人数中所占比例分边为 $s(t)$ 和 $i(t)$; (3) 每个病人每天有效接触的平均人数是常数 λ, λ 称为日接触率. 当病人与健康者有效接触时, 可使其患病. 模型建立 根据假设, 每个病人可使 $\lambda s(t)$ 个健康者变为病人, 因为病人的人数为 $Ni(t)$, 所以每天共有 $\lambda Ns(t)i(t)$ 个健康者被感染, 即病人的增加率为 $N \frac{di}{dt} = \lambda Nsi$
-------------	--

案例正文	又因为$s(t)+i(t)=1$，记时刻$t=0$时病人的比例为i_0，则建立下述模型 $\begin{cases} \frac{di}{dt} = \lambda i(1-i) \\ i(0) = i_0 \end{cases}$ 该模型就是著名的 logistic 模型.事实上，新冠病毒的蔓延过程和传播机制要复杂得多，面对未知的新型病毒，中国立马行动起来，党中央、国务院高度重视，始终把人民群众的生命安全和身体健康放在第一位，全力以赴做好防控工作，在全中国人民的全力配合下，中国最终取得了“战役”的胜利。 思政元素：①我国医学专家团队通过建立数学的 SEIR 传染病模型，科学地把握疫情的蔓延和传播趋势，从而能够帮助国家制定有效的、科学的疫情防控措施，保障人民的生命安全.②结合 2020 年年初新冠肺炎疫情的爆发和蔓延，弘扬全国人民上下同心、团结协作、顽强斗争，凝聚起众志成城抗击疫情的抗议精神，即：“生命至上，举国同心舍生忘死，尊重科学，命运与共”。 案例 2 【渔业资源的管理模型】 渔业资源是一种可再生资源，曾经被认为“取之不尽，用之不竭”。但是，由于人类无节制地开发利用，目前世界上的许多鱼类资源面临急剧减少或枯竭的状态.例如，1937 年南极须鲸的捕获量为 280 万吨，而到了 1978 年只有 5 万吨；秘鲁凤尾鱼 1970 年的捕获量为 1230 万吨，1978 年只有 50 万吨；我国东海大黄鱼 1974 年的捕获量为 10.8 万吨，到了 1990 年却只有 0.2 万吨。 渔业资源所面临的严峻状态，使人们意识到：必须采取科学有效的措施，控制捕捞率，使渔业资源维持在一个合理的水平上.否则，会有越来越多的鱼类濒临灭绝，到那时，渔业资源将面临枯竭，人们将无鱼可捕！ 试建立渔业资源的自然增长模型和合理的捕捞模型，讨论渔业资源数量的合理水平，并对渔业资源的合理开发和管理提出一些建议。
分析评价	本案例先由经典的马尔萨斯人口模型和高铁的制动模型出发，创设情境，激发学生的探索欲望，同时在两个模型的基础上，恰当地融入思政元素，引导学生树立学好数学的信心，增强学生的民族自豪感。
评 价 者	杨存典教授，商洛学院学生处

案例编号	AME030
案例标题	微分方程的基本概念
案例来源	原创
内容简介	本案例通过微分方程在物理领域、生物学领域、医学领域里的应用，即让学生能感受到简单的数学建模思想，又从实际问题中学会该类问题的解法，让学生深刻感受到数学的重要性。
关键词	几何意义；初值问题；微分方程的阶
编写时间	2022-3-1
编著者	程国副教授，数学与计算机应用学院
素材形式	文字、图片等
育人主题	树立学好数学的信心，增强学生的民族自豪感
素材长度	2013
案例正文	微分方程的基本概念： 思政要素切入点：1. 对于 2003 年发生的 SARS 疫情，国内外学者建立了大量的动力学模型研究其传播规律和趋势，通过传染病模型的不断优化体现不断探索的专研精神. 新冠疫情的大考体现出中国制度优势，特别是钟南山，张伯礼的榜样精神. 2. 微分方程是对自然科学和工程技术中各种不同系统的数学描述，是解决实际问题的重要工具，在生物经济，物理化学，航空航天，人文科学等学科中都有广泛应用，是数学理论联系实际的一个重要桥梁，促使学生深刻领会数学建模思想，方法. 3. 通解加初始条件得到一个特解，体现 不忘初心，牢记使命，为实现中华民族伟大复兴这一目标努力奋斗. 思政目标：1. 传染病模型的不断优化体现不断探索的专研精神. 新冠疫情的大考体现出中国制度优势，增强“四个自信”特别是制度自信，特别是钟南山，张伯礼的榜样精神. 2. 微分方程是数学理论联系实际的一个重要桥梁，促使学生深刻领会数学建模思想，方法，提高解决问题能力. 可离变量的微分方程： 思政要素切入点：1. Logistic 函数最初是解决人口增长问题，但现在越来越复杂的模型激发学生们不断专研的工匠精神，引导学生树立正确的人生观、世界观.

案例正文	2. 铀是核原料，我国作为核大国，具有核威慑，培养爱国主义精神，为科技兴国奋斗，结合日本的核废水事件，保持头脑清醒，同一切反华势力作斗争。 思政目标：1. 人口增长模型的不断优化激发学生创新精神，培养刻苦钻研精神。 2. 铀是核原料，作为核大国，培养爱国主义精神，为科技兴国奋斗，与反华势力斗争。 齐次微分方程： 思政要素切入点：1. 人贵有自尊之心，自立之举，自强之志。立志而圣则圣，立而贤则贤。志不立，天下无可成之事。——王夫之 2. 贵在有恒，成在有恒——非不能也，为不为也。 3. 一个自然环境中有两个种群生存，它们之间的关系：相互竞争；相互依存；弱肉强食。 当两个种群为争夺同一食物来源和生存空间相互竞争时，常见的结局是，竞争力弱的灭绝，竞争力强的达到环境容许的最大容量。 两个种群相互竞争： $\dot{x}_1(t) = r_1 x_1 \left(1 - \frac{x_1}{N_1} - \sigma_1 \frac{x_2}{N_2} \right)$ $\dot{x}_2(t) = r_2 x_2 \left(1 - \sigma_2 \frac{x_1}{N_1} - \frac{x_2}{N_2} \right)$ 再生资源(渔业、林业等)与非再生资源(矿业等)：再生资源应适度开发——在持续稳产前提下实现最大产量或最佳效益。 在捕捞量稳定的条件下，如何控制捕捞使产量最大或效益最佳。 $\dot{x}(t) = F(x) = rx\left(1 - \frac{x}{N}\right) - Ex$ 讨论：生活中诸如人口数量、种群的相互依存相互竞争，都可以用微分方程来描述，那微分方程如何求解呢？ 思政目标：1. 结合生活实例，基于齐次与非齐次的辩证关系，确定齐次方程的定义，培养学生人文素养和辩证思维的同时，让学生深刻体会数学的科学性和严谨性，帮助学生形成良好的学习习惯、思维严谨、工作求实的作风；培养学生持之以恒、坚持不懈的品质精神。 2. 结合学生现状和当今形势，鼓励学生努力学习科学文化知识。知识改变命运，知识带来进步，而这是一个长期的过程，需有持之以恒的恒心、坚韧不拔的毅力、坚定不移的自信心，需具备持
------	---

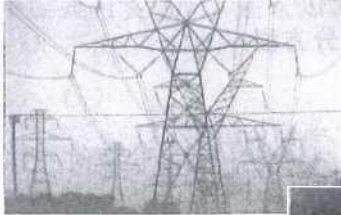
案例正文	之以恒的意志品质. 一阶线性微分方程: 思政要素切入点: 1. 人贵有自尊之心, 自立之举, 自强之志. 立志而圣则圣, 立志而贤则贤. 志不立, 天下无可成之事. ——王夫之 2. 贵在有恒, 成在有恒——非不能也, 为不为也. 3. 伯努利在物理学上的贡献有: (1) 1738 年出版了《流体力学》一书, 共 13 章. 这是他最重要的著作. 书中用能量守恒定律解决流体的流动问题, 写出了流体力学的基本方程, 后人称之为“伯努利方程”, 提出了“流速增加、压强降低”的伯努利原理. (2) 他还提出把气压看成气体分子对容器壁表面撞击而生的效应, 建立了分子运动理论和热学的基本概念, 并指出了压强和分子运动随温度增高而加强的事实. (3) 从 1728 年起, 他和欧拉还共同研究柔韧而有弹性的链和梁的力学问题, 包括这些物体的平衡曲线, 还研究了弦和空气柱的振动. (4) 他曾因天文测量、地球引力、潮汐、磁学、洋流、船体航行的稳定、土星和木星的不规则运动和振动理论等成果而获奖. 在数学方面: 有关微积分、微分方程和概率论等, 他也做了大量而重要的工作. 思政目标: 1. 结合生活实例, 基于齐次与非齐次的辩证关系, 确定齐次线性方程的定义, 培养学生人文素养和辩证思维的同时, 让学生深刻体会数学的科学性和严谨性, 帮助学生形成良好的学习习惯、思维严谨、工作求实的作风; 培养学生持之以恒、坚持不懈的品质精神. 2. 通过讲解伯努利的事例, 让学生在感受数学家魅力的同时, 树立远大理想, 努力学习文化知识, 为祖国的科技进步贡献自己的力量. 可降阶的高阶微分方程: 思政要素切入点: “条条大路通罗马”原话是“All Roads Lead to Rome”, 这是一句谚语, 出自《罗马典故》, 是指做成一件事的方法不止一种人生的路也不止一条等着我们发现. 相传条条大路通罗马这句话, 最早出自罗马皇帝尤里安(julian the apostate, 331-363)之口。尤里安是君士坦丁一世(约 280-337)之侄。他博学多才, 集学者、作家和将军于一身。古罗马
------	---

案例正文	原是意大利的一个小城邦. 公元前 3 世纪罗马统一了整个亚平宁半岛. 公元前 1 世纪, 罗马城成为地跨欧亚非三洲的罗马帝国的政治、经济和文化中心. 罗马帝国为了加强其统治, 修建了以罗马为中心, 通向四面八方的大道. 据史料记载, 罗马人共筑硬面公路 8 万公里. 这些大道促进了帝国内部和对外贸易和文化交流. 公元 8 世纪起, 罗马成为西欧天主教的中心, 各地教徒前往朝圣者络绎不绝. 据说, 当时从意大利半岛乃至欧洲的任何一条大道开始旅行, 只要不停地走, 最终都能抵达罗马. 更有趣的是, 古罗马统治者为了调兵遣将的方便, 下令在大道的两旁种上大树, 以便为行军的士兵遮挡炎热的阳光. 条条大道通罗马可喻为: 达到同一目的可以有多种不同的方法和途径. 与汉语成语殊途同归, 或俗话水流千里归大海相似. 思政目标: 1. 结合生活实例, 基于微分和积分的辩证关系, 培养学生人文素养和辩证思维的同时, 让学生深刻体会数学的科学性和严谨性, 帮助学生形成良好的学习习惯、思维严谨、工作求实的作风; 培养学生持之以恒、坚持不懈的品质精神. 2. 通过讲解“条条大路 通罗马”的典故, 让学生在领悟“人生在世, 可以选择 多种多样的成功, 不同的选 择铸就不同的成功”的同时, 树立远大理想, 努力学习文化知识, 为祖国的科技进步贡献自己的力量. 高阶线性微分方程: 思政要素切入点: 设一个弹簧, 上端固定, 下端挂一个质量为 m 的物体. 取 x 轴铅直向下, 并取物体的平衡位置为坐标原点. 给物体一个初始速度 $v_0 \neq 0$ 后, 物体在平衡位置附近做上下振动. 在振动过程中, 物体的位置 x 是 t 的函数: $x = x(t)$. 设弹簧在弹性系数为 c, 则恢复力 $f = -cx$. 又设物体在运动过程中受到的阻力的大小与速度成正比, 比例系数为 μ 则 $R - \mu \frac{dx}{dt}$ 由牛顿第二定理得 $m \frac{d^2 x}{dt^2} = -cx - \mu \frac{dx}{dt}$ 移项, 并记 $2n = \frac{\mu}{m}, \quad k^2 = \frac{c}{m},$
------	--

案例正文	$\frac{d^2x}{dt^2} + 2n\frac{dx}{dt} + k^2x = 0$, 这就是在有阻力的情况下, 物体自由振动的微分方程. 如果振动物体还受阻到铅直扰力 $F = H \sin pt$ 的作用, 则有 $\frac{d^2x}{dt^2} + 2n\frac{dx}{dt} + k^2x = h \sin pt$ 其中 $h = \frac{H}{m}$. 这就是强迫振动的微分方程。 方通过微分方程在物理领域里的应用, 即 让学生能感受到简单的数学建模思想, 又从实际问题中学会该类问题的解法, 让学生深刻感受到数学的重要性. 思政目标: 1. 结合生活实例, 基于微分和积分的辩证关系, 培养学生人文素养和辩证思维的同时, 让学生深刻体会数学的科学性和严谨性, 帮助学生形成良好的学习习惯、思维严谨、工作求实的作风; 培养学生持之以恒、坚持不懈的品质精神. 2. 通过讲解“条条大路 通罗马”的典故, 让学生在领悟“人生在世, 可以选择 多种多样的成功, 不同的选 择铸就不同的成功”的同时, 树立远大理想, 努力学习文化知识, 为祖国的科技进步贡献自己的力量. 常系数齐次线性微分方程: 思政要素切入点: 设有一个弹簧, 上端固定, 下端挂一个质量为 m 的物体. 取 x 轴铅直向下, 并取物体的平衡位置为坐标原点. 给物体一个初始速度 $v_0 \neq 0$ 后, 物体在平衡位置 x 附近作上下振动在振动过程中, 物体的位置是 x 的函数: $x = x(t)$ 设物体只受弹性恢复力 f 的作用, 且在初始时刻 $t = 0$ 的位置为 $x = x_0$, 初始速度为: $\left. \frac{dx}{dt} \right _{t=0} = v_0$, 求反映运动规律的函数 $x = x(t)$. 解: 由于不计阻力, 即假设
------	---

案例正文	$-\mu \frac{dx}{dt} = 0,$ 所以第六节中的强迫震动方程就变为: $\frac{d^2x}{dt^2} + k^2x = 0$ 这个方程称为无阻尼自由震动的微分方程. 该方程为二阶常系数齐次微分方程, 通过微分方程在物理领域里的应用, 即让学生能感受到简单的数学建模思想, 又从实际问题中学会该类问题的解法, 让学生深刻感受到数学的重要性 通过对第六节加以修改条件将二阶常系数非齐次线性微分方程变为二阶常系数齐次线性微分方程的过程, 让学生体会具体问题具体分析, 让其明白: 事物发展的内外因, 只要把握好做题的关键, 即内因是根据, 外因是条件, 外因通过内因而起作用. 思政目标: 1. 通过对第六节加以修改条件将二阶常系数非齐次线性微分方程变为二阶常系数齐次线性微分方程的过程, 让学生体会具体问题具体分析, 让其明白: 事物发展的内外因, 只要把握好做题的关键, 即内因是根据, 外因是条件, 外因通过内因而起作用. 2. 通过二阶常系数齐次线性微分方程通解公式的推导, 让学生深刻体会数学的科学性和严谨性. 常系数非齐次线性微分方程: 思政要素切入点: 弹簧上端固定, 下端挂一个质量为 m 的物体. 取 x 轴铅直向下, 并取物体的平衡位置为坐标原点. 给物体一个初始速度 $v_0 \neq 0$ 后, 物体在平衡位置附近作上下振动在受力不同的情况下所发生的震动为: 强迫振动的微分方程 并得到了方程: $\frac{d^2x}{dt^2} + 2n \frac{dx}{dt} + k^2x = h \sin pt$ 这就是强迫振动的微分方程, 为一个二阶线性微分方程. 若设该物体受弹性恢复力 f 和铅直干扰力 F 的作用, 试求物体的运动规律.
------	--

案例内容	这里就要求出无阻力强迫振动方程 $\frac{d^2x}{dt^2} + k^2x = h \sin pt$ 的通解，由于该方程为二阶常系数非齐线性 微分方程，求其通解应该是其齐次方程的通 解加上该方程的一个特解，其对应的齐次方 程的通解上节课已经讲过了，下面就用待定 系数法求该方程的一个通解. 思政目标：1. 通过微分方程在物理领域里的应用，即让学生能感受到简单的数学建模思想，又从实际问题中学会该类问题的解法，让学生深刻感受到数学的重要性. 2. 通过求特解的计算，培养学生认真细致的学习态度.
分析评价	本案例通过微分方程在物理领域、生物学领域、医学领域里的应用，即让学生能感受到简单的数学建模思想，又从实际问题中学会该类问题的解法，让学生深刻感受到数学的重要性.
评 价 者	杨存典教授，商洛学院学生处

案例编号	AME031
案例标题	可降阶的高阶微分方程
案例来源	购买
内容简介	先由悬链线模型出发,创设情境,激发学生的探索欲望,同时在此模型的基础上,恰当地融入思政元素,引导学生树立学好数学的信心。
关键词	高阶微分方程
编写时间	2022-3-1
编著者	余亚辉等, 洛阳理工学院
素材形式	文字、图片等
育人主题	树立学好数学的信心
素材长度	2880
案例正文	一、结合实际, 情景导入 在日常生活和科学领域研究中, 利用一阶微分方程解决实际问题具有局限性, 往往需要借助高阶微分方程建立数学模型, 解决实际问题, 比如: 导入: 如图 1 所示, 这是河边的一段防护栏, 那么铁链自然下垂形成的曲线是什么图形? 是抛物线吗? 事实上, 这种两端固定的一条(粗细与质量分布)均匀、柔软(不能伸长)链条, 在重力作用下自然下垂所形成的曲线称为悬链线, 例如悬索桥、挂着水珠的蜘蛛网、两根电线杆之间的电线(图 2)等, 都有着相似的曲线形态, 那么悬链线的曲线方程是什么? 如何求解? 这需要借助新的工具——高阶微分方程。   图一 图二 思政元素 【悬链线的起源】 悬链线问题源于达·芬奇的画作《抱银貂的女人》. 当达·芬奇在画女人脖颈上悬挂的黑色珍珠项链时, 开始思索这样一个问题: 固定 

案例正文	项链的两端，使其在重力的作用下自然下垂，那么项链所形成的曲线是什么？达·芬奇本人并没有解决这个问题，但是该问题存在多年且一直被人研究. 17 世纪意大利著名天文学家伽利略误认为这曲线是抛物线，与伽利略同时期的笛卡尔也有类似的猜测. 1646 年，荷兰物理学家惠更斯通过物理方法证明这条曲线不是抛物线，但也未能给出其具体数学函数形式. 直到 1690 年，历经 170 年的悬链线问题终于被惠更斯、莱布尼茨和约翰·伯努利解决，确定了悬链线的数学形式.  在中国，古人们很早以前便在桥梁建设中运用了悬链线，据明万历《新昌县志》记载，在我国江南水乡浙江绍兴发现的迎仙桥，是我国最古老的近似于悬链线拱的石拱桥，这比悬链线理论的传入早了一个世纪. 二、探究新知，形成概念 高阶微分方程指的是二阶及二阶以上的微分方程. 由于高阶微分方程的求解通常比一阶微分方程困难得多，因此对于高阶微分方程常常不是直接考虑方程的求解，而是设法通过降阶将其转化为低阶微分方程来求解. 可以通过变量代换化为较低阶方程的高阶微分方程称为可降阶的微分方程. 1 $y^{(n)} = f(x)$ 型的微分方程 微分方程 $y^{(n)} = f(x) \quad (2-1)$ 观察：方程的右端仅含有自变量 x. 提问：方程 $y^{(n)} = f(x)$ 如何降阶？ 容易看出，只要把 $y^{(n-1)}$ 作为新的未知函数，那么 (2-1) 式就是新未知函数的一阶微分方程. 两边积分，就得到一个 $n-1$ 阶的微分方程 $y^{(n-1)} = \int f(x) dx + C_1$ 同理可得 $y^{(n-2)} = \int [\int f(x) dx + c_1] dx + C_2$ 依次法继续进行，接连积分 n 次，得到方程的 (2-1) 有的含有 n 个任意常数的通解. 例一 求微分方程 $y''' = e^{2x} - \cos x$ 的通解
-------------	--

案例正文	解 该方程是形如 $y^{(n)} = f(x)$ 的可降阶的三阶方程, 对这类方程只需逐次积分就可求得方程的通解. 对所给方程接连积分三次, 得 $y'' = \frac{1}{2}e^{2x} - \sin x + C$ $y' = \frac{1}{4}e^{2x} + \cos x + Cx + C_2$ $y = \frac{1}{8}e^{2x} + \sin x + C_1x^2 + C_2x + C_3 (C_1 = \frac{C}{2}) \text{ 这就是所求的通解.}$ 2 $y'' = f(x, y')$ 型的微分方程 微分方程 $y'' = f(x, y') \quad (2-2)$ 观察: 方程的右端不明显地含未知函数 y. 提问: 方程 $y'' = f(x, y')$ 如何降阶? 如果我们设 $y' = p$, 那么 $y'' = \frac{dp}{dx} = p'$ 而方程 (2-2) 就成为 $p' = f(x, p)$. 这是一个关于变量 x, p 的一阶微分方程, 其中 x 是自变量, p 是未知函数. 设其通解为 $p = \varphi(x, C_1)$ 但是 $p = \frac{dy}{dx}$, 因此又得到一个一阶微分方程 $\frac{dy}{dx} = \varphi(x, C_1)$. 对它进行积分, 便得到方程 (2-2) 的通解为 $y = \int \varphi(x, C_1) dx + C_2$ 3 $y'' = f(y, y')$ 型的微分方程 微分方程 $y'' = f(y, y') \quad (2-3)$ 观察: 方程的右端不明显的含自变量 x. 提问: 方程 $y'' = f(y, y')$ 如何降阶? 自主探究: 如果我们设 $y' = p$, 那么 $y'' = \frac{dp}{dx} = p'$
------	--

$$y'' = \frac{dp}{dx} = \frac{dp}{dy} \cdot \frac{dy}{dx} = p \frac{dp}{dy}$$

这样，方程（2-3）就成为 $p \frac{dp}{dy} = f(y, p)$

这是一个关于变量 y, p 的一阶微分方程，这里 y 是自变量， p 是未知函数. 设它的通解为

$$y' = p = \varphi(y, C_1)$$

分离变量并积分，便得到方程（2-3）的通解为

$$\int \frac{dy}{\varphi(y, C_1)} = x + C_2$$

例 2 求微分方程 $yy'' - y'^2 = 0$ 的通解.

解 设 $y' = p$ ，则 $y'' = p \frac{dp}{dy}$ ，代入方程得

$$yp \frac{dp}{dy} - p^2 = 0$$

在 $y \neq 0, p \neq 0$ 时，约去 p 并分离变量，得

$$\frac{dp}{p} = \frac{dy}{y}$$

两端积分得

$$\ln|p| = \ln|y| + C$$

即 $p = C_1 y$ 或 $y' = C_1 y (C_1 = \pm e^C)$. 再分离变量并两端积分，便得到方程的通解为

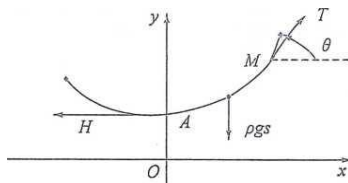
$$y = C_2 e^{C_1 x}$$

三、尝试探究，深化概念

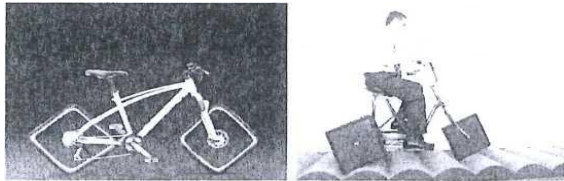
针对悬链线问题，尝试建立微分方程的数学模型，利用高阶微分方程的相关知识，获得悬链线的方程，深化概念.

【曲线悬链线的方程】

设有一均匀、柔软的绳索（如图所示），两端固定，绳索仅受重力的作用而下垂. 试问绳索在平衡状态时是怎样的曲线？



案例正文	解 以绳索的最低点为 A. 取 y 轴通过 A 铅直向上, 并取 x 轴水平向右, 且 OA 等于某个定值 (这个定值将在以后说明). 设绳索曲线的方程为 $y = \varphi(x)$. 考察绳索上点 A 到另一点 $M(x, y)$ 间的一段弧长 $\widehat{AM}$, 设其弧长为 s. 假设绳索的线密度为 ρ, 则弧 $\widehat{AM}$ 所受重力为 $\rho g s$. 由于绳索是柔软的, 因而再点 A 处的张力沿水平的切线方向, 其大小设为 H; 在点 M 处的张力沿该点处的切线方向, 设其倾角为 θ, 其大小为 T. 因作用于弧段 $\widehat{AM}$ 的外力相互平衡, 把作用于弧 $\widehat{AM}$ 上的力沿铅直及水平两方向分解, 得 $T \sin \theta = \rho g s, T \cos \theta = H$ 将此两式相除, 得 $\tan \theta = \frac{1}{a} s \left(a = \frac{H}{\rho g} \right)$ 由于 $\tan \theta = y'$, $s = \int_0^x \sqrt{1 + y'^2} dx$, 代入上式即得 $y' = \frac{1}{a} \int_0^x \sqrt{1 + y'^2} dx$ 将上式两端对 x 求导, 便得到 $y = \varphi(x)$ 满足的微分方程 $y'' = \frac{1}{a} \sqrt{1 + y'^2}$ 取原点 O 到点 A 的距离为定值 a, 即 $OA = a$, 那么初值条件为 $y _{x=0} = a, y' _{x=0} = 0$ 综合上述分析, 求解绳索的曲线方程 $y = \varphi(x)$ 就归结为求解如下初值问题 $\begin{cases} y'' = \frac{1}{a} \sqrt{1 + y'^2} \\ y _{x=0} = a, y' _{x=0} = 0 \end{cases}$ 上述方程属于 $y'' = f(x, y')$ 的类型. 设 $y' = p$, 则 $y'' = \frac{dp}{dx} = p'$, 代入方程, 分离变量得 $\frac{dp}{\sqrt{1 + p^2}} = \frac{1}{a} dx$ 两端积分得 $\ln(p + \sqrt{1 + p^2}) = \frac{x}{a} + C_1$
------	---

案例正文	案例 1【交通事故调查】 在公路交通事故现场,常会发生事故车辆的车轮底下有一段拖痕.这是紧急刹车后制动片抱紧制动箍使车轮停止了转动,由于惯性的作用,车轮在地面上摩擦滑动而留下的.如果在事故现场测得拖痕长度为 10m, 事故调查人员应如何判定事故车辆在紧急刹车前的车速? 案例 2【方形车轮自行车, 也能跑起来】 大家都知道, 自行车的车轮基本是圆形的, 在平坦的地面上可以平稳行进, 如果我们把自行车的车轮换成方形的 (图 1), 它还能顺利地跑起来吗? 事实上, 方形车轮无法在平地上自由行驶, 但是只要将正方形车轮放在倒置悬链线路面上, 自行车依然可以平稳行驶 (图 2). 这是因为正方形的车轮沿着倒置的悬链线滚动时, 正方形车轮的重心始终在同一条水平线上, 这就保证了自行车行驶平稳, 这一点同学们可依据悬链线理论建立合适的数学模型自主研究. 
分析评价	本案例先由悬链线模型出发, 创设情境, 激发学生的探索欲望, 同时在此模型的基础上, 恰当地融入思政元素, 引导学生树立学好数学的信心。
评 价 者	杨存典教授, 商洛学院学生处

案例编号	AME032
案例标题	数量积与向量积
案例来源	原创
内容简介	本节以三峡水电站三峡大坝的泄洪情况，引出向量积的计算问题。让学生感受三峡大坝是我国的大国重器，进一步提升民族责任感和自豪感，培养学生的爱国精神。通过向量积坐标表示的行列式记法，使学生欣赏数学的对称美，感受到数学上的统一美。
关键词	数量积；向量积；
编写时间	2021-8-29
编著者	黄丽琼讲师，数学与计算机应用学院
素材形式	文字、图片等
育人主题	树立学好数学的信心，增强学生的民族自豪感
素材长度	1206
案例正文	数量积与向量积： 思政要素切入点：1. 三峡水电站，即长江三峡水利枢纽工程，又称三峡工程。三峡水电站是目前全世界最大的水力发电站和清洁能源生产基地，也是目前中国有史以来建设最大型的工程项目。三峡水电站的功能有十多种，航运、发电、种植等等。2020年8月，长江2020年第5号洪水已在长江上游形成，三峡水利枢纽迎来建库以来最大的洪峰，当时开启11孔泄洪。这是当今世界上最大的水利发电工程——三峡大坝泄洪图。 思考：拦水坝单位时间内通过一曲面从坝的一侧流向另一侧河水的质量该如何计算？ 2. 向量积坐标表示的行列式记法 $a \times b = \begin{vmatrix} i & j & k \\ a_x & a_y & a_z \\ b_x & b_y & b_z \end{vmatrix}$ 思政目标：1. 让学生感受三峡大坝是我国的大国重器，进一步提升民族责任感和自豪感，培养学生的爱国精神。 2. 通过向量积坐标表示的行列式记法，使学生欣赏数学的对称美，感受到数学上的统一美。 空间直线及其方程： 思政要素切入：欧几里得——古希腊人，数学家。他被称为“几

案例正文	何之父”，他最著名的著作《几何原本》是欧洲数学的基础，提出五大公设(任意一点到另外任意一点可以画直线，:以任意点为心及任意的距离可以画圆等). 欧几里得几何，被广泛的认为是历史上最成功的教科书. 欧几里得也写了一些关于透视、圆锥曲线、球面几何学及数论的作品. 欧几里得也是一位治学严谨的学者，他反对在做学问时投机取巧和追求名利，反对投机取巧、急功近利的作风. 尽管欧几里得简化了他的几何学，国王(托勒密王)还是不理解，希望找一条学习几何的捷径. 欧几里德说：“在几何学里，大家只能走一条路，没有专为国王铺设的大道.” (求知无坦途)这句话成为千古传诵的学习箴言. 思政目标: 通过实例引入内容，培养学生对待科学的严谨态度，努力学习科学知识，为国做贡献，激发爱国热情. 曲面及其方程: 思政要素切入点: 望远镜的设计二次曲面的一个重要应用是设计透镜，以用于望远镜、显微镜等光学仪器的制作. 1609 年夏天听说荷兰人发明了望远镜之后，伽利略立刻动手造了一台，并不断改进，使之达到了 33 倍的大倍数. 当他把望远镜对准天空的时候，他看到了天堂的面貌，并立即宣布，他证明了哥白尼体系的真理性. 可惜，他的望远镜没有保留下来. 可幸的是，牛顿也造了一台望远镜，并保留了下来，现保存在英国皇家协会的收藏室. 牛顿不但是著名的数学家和物理学家，也是一位出色的实验家和能工巧匠，望远镜的镜片是他亲手打磨的. 在牛顿制造望远镜不久，法国科学院接到一个报告，一位名叫卡塞格伦造了一台反射望远镜. 卡塞格伦的望远镜与牛顿的望远镜的不同之处仅在于中间的反射镜，牛顿用的是平面，卡塞哥伦用的是双曲面. 定积分基本公式，全部源于积分的定义与基本性质，而这些公式会被运用在各种积分问题的解决中. 积分的定义与基本性质是少量的，而基于积分的定义和基本性质推导出来的“定积分基本公式”是很多的，而且这个“很多”是用来解决“更多甚至无穷”的问题. 思政目标: 通过实例引入内容，培养学生对待科学的严谨态度，努力学习科学知识，为国做贡献，激发爱国热情. 空间直线及其方程: 思政要素切入点: 勒奈·笛卡尔(Rene Descartes) , 1596 年 3 月 31 日生于法国都兰城. 笛卡尔是伟大的哲学家、物理学家、数学家、生理学家. 解析几何的创始人. 笛卡儿是欧洲近代资产阶级.
------	---

案例正文	哲学的奠基人之一，黑格尔称他为“现代哲学之父”。他自成体系，熔唯物主义与唯心主义于一炉，在哲学史上产生了深远的影响。同时，他又是一位勇于探索的科学家，他所建立的解析几何在数学史上具有划时代的意义。他的普遍方法的一个最成功的例子，是笛卡尔运用代数的方法来解几何问题，确立了坐标几何学即解析几何学的基础。笛卡尔的方法论中还有两点值得注意。第一，他善于运用直观“模型”来说明物理现象。例如利用“网球”模型说明光的折射；用“盲人的手杖”来形象地比喻光信息沿物质作瞬时传输；用盛水的玻璃球来模拟并成功地解释了虹霓现象等。第二，他提倡运用假设和假说的方法，如宇宙结构论中的旋涡说。此外他还提出“普遍怀疑”原则。这一原则在当时的历史条件下对于反对教会统治、反对崇尚权威、提倡理性、提倡科学起过很大作用。 我们要学习科学家善于思考，多方面发展，努力为国家做贡献。 思政目标：通过螺旋线实例引入内容，培养学生对待科学的严谨态度，努力学习科学知识，为国做贡献，激发爱国热情。
分析评价	本案例以三峡水电站三峡大坝的泄洪情况，引出向量积的计算问题。让学生感受三峡大坝是我国的大国重器，进一步提升民族责任感和自豪感，培养学生的爱国精神。通过向量积坐标表示的行列式记法，使学生欣赏数学的对称美，感受到数学上的统一美。
评价者	杨存典教授，商洛学院学生处

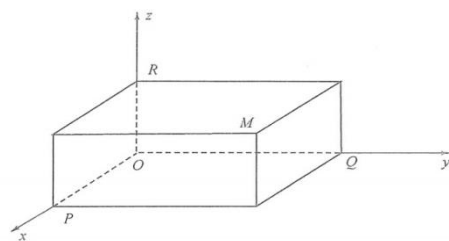
案例编号	AME033
案例标题	空间直角坐标系
案例来源	购买
内容简介	从百岁山广告引入,介绍广告背后蕴含的故事,引出解析几何之父—笛卡尔.再介绍空间直角坐标系的概念,在此基础上讲解空间点的坐标和空间两点间的距离公式.在讲解几何知识的同时,向学生介绍几何学的产生和发展历史,恰当引入思政元素以及几何学在实际生活中的应用,教育学生所学的知识都是来源于生活的.鼓励学生用所学知识解决生活中的问题。
关键词	空间直角坐标系、两点间的距离、集合概念
编写时间	2022-3-9
编著者	余亚辉等,洛阳理工学院
素材形式	文字、图片等
育人主题	数学知识来源于生活,鼓励学生用所学知识解决生活问题
素材长度	2880
案例正文	一、结合史话,情境导入 百岁山广告的故事讲的是 1950 年发生在斯德哥尔摩街头的一件事,52 岁的笛卡尔邂逅了 18 岁瑞典公主克莉丝汀.笛卡尔落魄无比、穷困潦倒又不愿意请求别人的施舍,每天只是拿着破笔破纸研究数学题.有一天,克莉丝汀的马车路过街头发现了笛卡尔是在研究数学.公主便下车询问,最后笛卡尔发现公主很有数学天赋,道别后的几天笛卡尔收到通知,国王要求他做克莉丝汀公主的数学老师.其后几年中相差 34 岁的迪卡和克里斯汀相爱,国王发现并处死了笛卡尔.在最后笛卡尔写给克莉丝汀的情书中出现了 $r = a(1 - \sin \theta)$ 的数学坐标方程,解出来是个心形图案,就是著名的“心形线”这封情书最后被收录到欧洲笛卡尔博物馆.  笛卡尔最为世人熟知的是其作为数学家的成就.他于 1637 年发明了现代数学的基础工具之一——坐标系,将几何和代数相结合,创立了解析几何学. 思政元素 几何学家笛卡尔的故事

案例正文	问题引入 平面解析几何，一元函数微分学有了直观的几何意义，为了更好地学习多元函数微积分，我们需要了解空间解析几何的相关知识. 二、开宗明义，讲述概念 将数轴（一维）、平面直角坐标系（二维）进一步推广建立空间直角坐标系（三维） 从空间任一点，引三条相互垂直且有相同单位长度的数轴，分别称为x轴(横轴)、y轴(纵轴)、z轴(竖轴). 按习惯,把x轴、y轴放置在水平面上,z轴放在垂直位置上,点O称为坐标原点,这样就构成了空间直角坐标系. 他们的正向按右手螺旋法确定,以右手握住z轴,当四个手指从x轴正向以90°度转向轴正向时,大拇指的指向即为z轴正向. 任意两个轴确定一个平面，称为坐标面，即xOy面、yOz面和zOx面 三个坐标面分为八个部分，每一个部分称为一个卦限，共八个卦限,含有x轴、y轴、z轴正半轴的卦限称为第一卦限,在xOy面的上方，按逆时针方向确定第二、三、四卦限.第五到第八卦限在xOy面的下方，分别与前四个对应. 空间每个卦限内的点的坐标分别为：I $(+, +, +)$, II $(-, +, +)$, III $(-, -, +)$, IV $(+, -, +)$, V $(+, +, -)$, VI $(-, +, -)$, VII $(-, -, -)$, VIII $(+, -, -)$. 思政元素： 《周易》是中国传统思想文化中自然哲学与人文实践的理论根源，是古代汉民族思想、智慧的结晶，被誉为“大道之源”，内容极其丰富，对中国几千年来的政治、经济、文化等各个领域都产生了极其深刻的影响。
-------------	--

三、尝试探究，深化概念

1 空间直角坐标系中的坐标

设 M 为空间中任一点，过 M 点做三个平面分别垂直于 x 轴、 y 轴、 z 轴，它们与三个坐标轴的交点分别为 P 、 Q 、 R ，这三点在 x 轴、 y 轴、 z 轴上的坐标为 x 、 y 、 z ，用 (x, y, z) 表示. 反之，任给一组有序数组 x 、 y 和 z ，它们分别与 x 轴、 y 轴、 z 轴上的对应点为 P, Q, R ，过 P, Q, R ，分别作垂直于 x 轴、 y 轴、 z 轴的平面，三平面交于点 M . 这样，一个有序数组 (x, y, z) 就确定了空间唯一的一个点 M .



由此，通过空间直角坐标系，就建立了空间中任一点 M 与有序数组 (x, y, z) 之间的一一对应关系，称有序数组 (x, y, z) 为点 M 的坐标， x 、 y 、 z 分别称为点 M 的横坐标，纵坐标，竖坐标. 特别的，坐标轴与坐标面上的点有一定的特征，在 x 、 y 、 z 轴上的点的坐标分别为 $(x, 0, 0)$ 、 $(0, y, 0)$ 、 $(0, 0, z)$ ，在 xOy 面、 yOz 面、 zOx 面上的坐标分别为 $(x, y, 0)$ 、 $(0, y, z)$ 、 $(x, 0, z)$ ，坐标原点 O 的坐标为 $(0, 0, 0)$ 。

2 空间两点间的距离公式

在数轴上， $M_1(x_1)$ 、 $M_2(x_2)$ 两点间的距离公式为

$$d = |M_1M_2| = |x_2 - x_1| = \sqrt{(x_2 - x_1)^2}$$

在平面上， $M_1(x_1, y_1)$ 、 $M_2(x_2, y_2)$ 两点间的距离公式为

$$d = |M_1M_2| = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2},$$

上式称为空间中两点间的距离公式.

那么，在空间中，任意两点 $M(x_1, y_1, z_1)$ 、 $M(x_2, y_2, z_2)$ 之间的距离是多少？我们可以证明

$$d = |M_1M_2| = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2 + (z_2 - z_1)^2}$$

特别地，设 $M(x, y, z)$ 为空间任意一点，则有 M 到原点 O 的距离

$$d(OM) = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$$

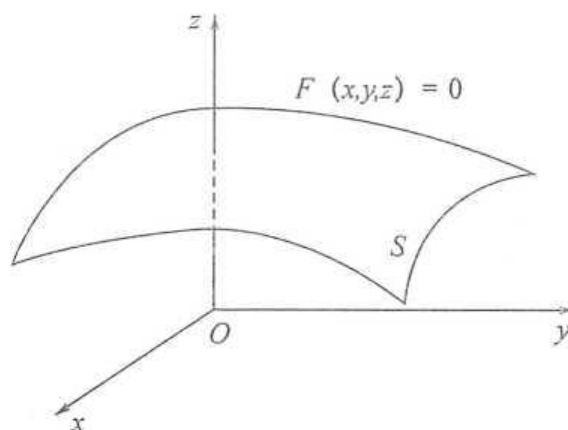
四、巩固练习，拓展应用

$$|M_1M_2| = \sqrt{(7-4)^2 + (1-3)^2 + (2-1)^2} = \sqrt{14}$$

案例正文	$ M_2M_3 = \sqrt{(5-7)^2 + (2-1)^2 + (3-2)^2} = \sqrt{6}$ $ M_1M_3 = \sqrt{(5-4)^2 + (2-3)^2 + (3-1)^2} = \sqrt{6}$ 所以 $M_1M_3 = M_2M_3$. 故 $\triangle M_1M_2M_3$ 是等腰三角形. 思政元素：几何与生活 案例 1【埃及金字塔为何建成四棱锥性？】 先做一个实验：把一定数量的、沙、碎石子，分别从上向下慢慢倾倒，就会形成三个圆锥体，测量发现它们的锥角都是 52°. 这样自然形成的角是最稳定的角，称为“自然塌落现象的极限角和稳定角”. 金字塔正好是 $51^\circ 50' 9''$，说明它就是按照这种“极限角和稳定角”来建造的. 沙漠的风是暴力的，由于金字塔独特的造型，迫使凌厉的风势不得不沿着塔的斜面或棱角缓缓上升，塔的受风面由下而上，越来越小，在到达塔顶的时候，塔的受风面趋近于零. 52° “角”，方锥体的“形”的金字塔稳定之谜. 案例 2【圆形在产品设计中的应用】 在建筑上，圆形的建筑物更有利于减少风的阻力，从而减少了高楼风的形成概率，圆形建筑物的地基更稳固. 从传热学上讲，圆形更能节省能源，因为圆形是放热最少的形状，保温杯通常都是圆形的就是这个道理，天气很冷的时候猫科动物都喜欢将自己的身体蜷缩起来也是这个道理. 圆是轴对称图形，也是中心对称图形. 周长相同时，几何形中面积最大. 在机械中，磨损最小，阻力最小而且美观，经济也很实用. 因此，由于圆的种种优点，它被广泛应用在生活的方方面面，例如，井盖、车轮、方向盘、帽子、电风扇、家具、电灯等.
分析评价	本案例从百岁山广告引入，介绍广告背后蕴含的故事，引出解析几何之父—笛卡尔. 再介绍空间直角坐标系的概念，在此基础上讲解空间点的坐标和空间两点间的距离公式. 在讲解几何知识的同时，向学生介绍几何学的产生和发展历史，恰当引入思政元素以及几何学在实际生活中的应用，教育学生所学的知识都是来源于生活的. 鼓励学生用所学知识解决生活中的问题。
评 价 者	杨存典教授，商洛学院学生处

案例编号	AME034
案例标题	空间曲线
案例来源	购买
内容简介	从介绍美丽的建筑出发，引出空间曲线相应问题，让学生对空间曲线来源于生活更服务于生活有了深入了解，理解数学之美，激励学生为祖国建设做出贡献。
关键词	空间曲线
编写时间	2022-3-1
编著者	余亚辉等，洛阳理工学院
素材形式	文字、图片等
育人主题	理解数学之美，激励学生为祖国建设做出贡献
素材长度	1020
案例正文	一. 空间曲线的概念 首先，用一幅幅美丽的建筑物引入，介绍这些建筑之美，接着把这些建筑的曲线设计与空间曲面与曲线结合，自然的引出空间曲面以及空间曲线的问题。 再谈到中国国家大剧院外部为钢结构壳体，成半椭球形，造型完全由曲线组成，自然的贝壳造型保证了它的坚固度。明朝吴中“四才子”之一祝允明在其诗作《杂题画景》中描述“面面青山曲曲溪，流云易度石墙低”。曲面的画感扑面而来。 通过实际生活中的例子，将抽象内容和具体例子的结合，比较自然地引入曲面方程概念。 1. 曲面方程的概念 像在平面解析几何中将平面曲线当做动点的轨迹一样，在空间解析几何中任何曲面都可看作是点的几何轨迹，在这样的意义下，

定义：如果曲面 S 上每一点的坐标都满足方程 $F(x,y,z)=0$ ；而不再曲面 S 上的点的坐标都不满足方程 $F(x,y,z)=0$ ，则称方程 $F(x,y,z)=0$ 为曲面的方程，称曲面 S 为方程 $F(x,y,z)=0$ 的图形。



2. 空间曲线的方程

空间曲线的一般方程

空间曲线 C 可以看做两张曲面的交线。

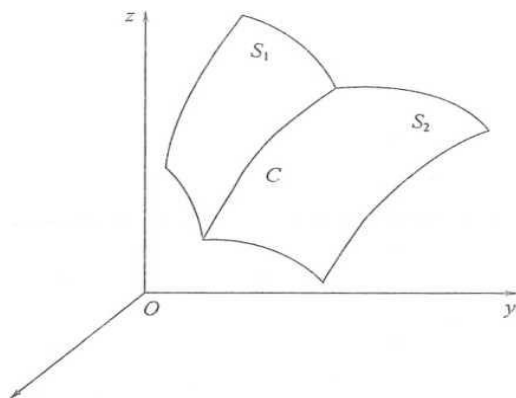
设 $F_1(x,y,z)=0$ 和 $F_2(x,y,z)=0$ 是两张曲面 S_1, S_2 的方程，他们的交线为 C ，则曲线 C 上的点必定同时满足 S_1, S_2 的方程，不在 C 上的点一定不能同时满足这两个方程，因此联立方程组

$$\begin{cases} F_1(x,y,z) \\ F_2(x,y,z) \end{cases} \quad (1)$$

即为空间曲线 C 的方程，方程组 (1) 称为空间曲线 C 的一般方程。

思政元素：从中国国家大剧院外部钢结构半椭球形的完美曲线，再谈到明朝吴中“四才子”之一的祝允明的《杂题画境》，生活中的曲面美景扑面而来，引发学生对曲面、曲线学习的兴趣。

展示曲线之美，展示国人审美，特别介绍我国古代精美建筑，培养科学的审美，增强学生的自信心和民族自豪感。



空间曲线的参数方程

在空间直角坐标系中, 若将曲线 C 上的动点 x 、 y 、 z 分别表示参数 t 的函数

$$\begin{cases} x = x(t), \\ y = y(t), \\ z = z(t), \end{cases} \quad (\alpha \leq t \leq \beta) \quad (2)$$

当给定 $t = t_1$ 时, 就得到曲线 C 上的一个点 $(x(t_1), y(t_1), z(t_1))$; 随着 t 的变动, 便可以得到曲线 C 上的全部点。方程组 (2) 称为空间曲线 C 的参数方程。

从参数方程 (2) 中消去参数 t 便可得到空间曲线的一般方程 (1)。

在实际问题中, 特别是求物体运动的轨迹时, 常常用到参数方程。

3. 螺旋线

如果空间一点 M 在圆柱面 $x^2 + y^2 = a^2$ 上, 以角速度 ω 绕 Z 轴旋转, 同时又以线速度 v 沿平行于 Z 轴的正方向上升 (其中 ω 、 v 都是常数), 那么点 M 的轨迹曲线称为螺旋线。

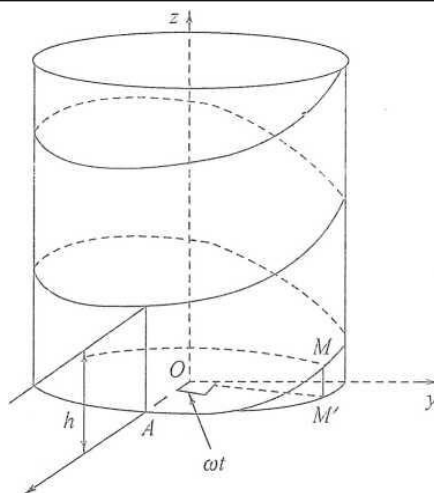
取时间 t 为参数设, 当 $t = 0$ 时, 动点位于 x 轴上的一点 $A(a, 0, 0)$ 处经过时间 t , 动点由 A 运动到 $M(x, y, z)$ 记点 M 在 xoy 平面上的投影为 M' 。点 M' 的坐标为 $(x, y, 0)$, 由于动点在圆柱面上以角速度 ω 绕 z 轴旋转, 所以经过时间 $\angle AOM' = \omega t$ 从而

$$x = |OM'| \cos \angle AOM' = a \cos \omega t,$$

$$y = |OM'| \sin \angle AOM' = a \sin \omega t,$$

又由于动点同时以线速度 v 为沿平行于 z 轴的正方向上升所以

$$z = MM' = vt$$



因此螺旋线的参数方程为

$$\begin{cases} x = a \cos \omega t, \\ y = a \sin \omega t, \\ z = vt, \end{cases}$$

如果令参数 $\theta = \omega t$, 并记 $b = \frac{v}{\omega}$, 则螺旋线的参数方程也可以写作

$$\begin{cases} x = a \cos \theta, \\ y = a \sin \theta, \\ z = b\theta. \end{cases}$$

螺旋线是一种常见的曲线, 比如机用螺丝的外圆曲线就是螺旋线。当 θ 从 θ_0 变到 $\theta_0 + \alpha$ 时, z 由 $b\theta_0$ 变到 $b\theta_0 + b\alpha$ 。这说明当 OM' 转过角 α 时, M 点沿螺旋线上升了高度 $b\alpha$ 。及上升的高度与转过的角度成正比 b 在工程技术上称为螺距。

思政元素: 在图形的基础上建立空间模型, 进而解决数学问题。是学生学会独立思考, 发散思考, 遇到事情要积极应对, 直面问题。要向科学家学习, 遵循科学规律, 善于发现, 不断总结, 推进社会进步。

例 1. 建立球心在点 $M_0(x_0, y_0, z_0)$ 、半径为 R 的球面方程。

解: 设 $M(x, y, z)$ 是球面上任一点, 那么 M 到球心 M_0 的距离都等于 R , 既有 $M_0M = R$, 由于

$$M_0M = \sqrt{(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 + (z - z_0)^2}, \text{ 所以}$$

$$(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 + (z - z_0)^2 = R^2$$

这就是球面上的点的坐标所满足的方程, 而不是在球面上的点的坐标都不满足这一方程, 所以方程就是以点 $M_0(x_0, y_0, z_0)$ 为球。

分析评价	本案例从介绍美丽的建筑出发，引出空间曲线相应问题，让学生对空间曲线来源于生活更服务于生活有了深入了解，理解数学之美，激励学生为祖国建设做出贡献。
评 价 者	杨存典教授，商洛学院学生处

案例编号	AME035
案例标题	多元函数的基本概念
案例来源	购买
内容简介	多元函数本质为多个变量变化引起另外一个变量按照对应关系发生变化。就像一个集体的每一个成员都是一个变量，每一位成员的行为都会给整个集体带来不同的影响，如果每一位同学追求进步，班风和校风自然就积极向上，同样，每一个公民做好自己的本职工作，国家自然富强.
关键词	多元函数；平面点集；区域；多元函数极限
编写时间	2022-3-1
编著者	余亚辉等，洛阳理工学院
素材形式	文字等
育人主题	集体主义精神
素材长度	2304
案例正文	问题引入 在几何学中，矩形面积依赖于长和宽，而立方体体积则依赖于长、宽、高三条边的长度. 某企业生产销售三种商品，它们的市场销售价格相对固定，分别为p_1、p_2、p_3，同时它们的月销售量均不超过 100 件，分别用 x_1、x_2、x_3表示，那么企业三种商品月销售收入总量 R 可表示为： $R = p_1 \cdot x_1 + p_2 \cdot x_2 + p_3 \cdot x_3$ 上面几个具体的实际问题虽然表现形式有所不同，但都是研究一个变量与另外多个变量之间的联系，是一种普遍存在的关系. 思政元素 正如唐代王之涣在《登鹳雀楼》里所说：“白日依山尽，黄河入海流. 欲穷千里目，更上一层楼.” 多元函数相关概念，极限与连续 我们类比一元函数$y = f(x)$的概念形成，将这种关系抽象、归纳，引入二元函数的概念，并进一步推广到多元函数. 由于二元函数相比一元函数，其自变量增加为两个，因此函数的定义域、值域、几何表示等方面都有变化，因此在给出二元函数的定义之前，首先给出定义域的表示方法，即平面点集的相关概念. 1 平面点集、区域 平面点集:平面上具有某种性质的点的集合 E. [类似数轴上的点

的集合(区间)]

(1)邻域 设 $P_0(x_0, y_0)$ 是 xoy 平面上的一个点, δ 是某一正数, 与点 $P_0(x_0, y_0)$ 距离小于 δ 的点 $P(x, y)$ 全体, 称为点 P_0 的 δ 邻域, 记为 $U(P_0, \delta)$ 。

$$\begin{aligned}U(P_0, \delta) &= \{P | |PP_0| < \delta\} \\&= \{(x, y) | \sqrt{(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2} < \delta\}\end{aligned}$$

(2)点集 E 的几类点

内点:设 E 是平面上的一个点集, P 是平面上的一个点, 如果存在点 P 的某一个邻域 $U(P)$ 满足 $U(P) \subset E$, 则称 P 为 E 的内点.

外点:设 E 是平面上的一个点集, P 是平面上的一个点, 如果存在点 P 的某一个邻域 $U(P)$ 满足 $U(P) \cap E = \emptyset$, 则称 P 为 E 的外点.

边界点:设 E 是平面上的一个点集, P 是平面上的一个点, 如果点 P 的任一个邻域 $U(P)$ 内既有内点, 又有外点则称 P 为 E 的边界点, 边界点的全体称为边界.

聚点:设 E 是平面上的一个点集, P 是平面上的一个点, 如果点 P 的任一个邻域 $U(P)$ 内总有无多个点属于 E , 则称 P 为 E 的聚点(即内点和边界点)(类似区间端点).

(3)区域(常用的平面点集)

开集:如果点集 E 的点都是内点, 则称 E 为开集.

连通集: E 内任意两个点, 均可以用 E 中折线连接起来, 则称 E 是连通集.

开区域:连通的开集称为区域或开区域.

闭区域:开区域连同它的边界一起构成的点集.

有界域: $\exists r > 0$ 使 $E \subset U(O, r)$. 反之为无界域.

例如: $E_1 = \{(x, y) | 1 < x^2 + y^2 < 4\}$ 为开集、连通集、有界集;
 $E_2 = \{(x, y) | x^2 + y^2 \geq 4\}$ 为闭集、无界集.

例如: $\{(x, y) | 1 \leq x^2 + y^2 \leq 4\}$ 为有界闭区域;

$\{(x, y) | x + y > 0\}$ 为无界开区域.

注意:

内点一定是聚点; 点集 E 的聚点可以属于 E , 也可以不属于 E , 例如 $\{(x, y) | 0 < x^2 + y^2 \leq 1\}$, $(0, 0)$ 是聚点但不属于集合.

例如 $\{(x, y) | x^2 + y^2 = 1\}$, 边界上的点都是聚点, 也都属于集合.

2 多元函数概念

(1) 二元函数的定义 设 D 是平面上的一个点集, 如果对于每个点 $p(x, y) \in D$, 变量 z 按照一定的法则总有确定的值和它对应, 则称 z 是变量 x, y 的二元函数, 记为 $z = f(x, y)$ [或记为点函数 $z = f(p)$].

类似地可定义三元及三元以上函数.

当 $n \geq 2$ 时, n 元函数统称为多元函数.

思政元素

多元函数本质为多个变量变化引起另外一个变量按照对应关系发生变化. 就像一个集体的每一个成员都是一个变量, 每一位成员的行为都会给整个集体带来不同的影响, 如果每一位同学追求进步, 班风和校风自然就积极向上, 同样, 每一个公民做好自己的本职工作, 国家自然富强.

多元函数中同样有定义域、值域、自变量、因变量等概念.

(2) 求二元函数 $z = f(x, y)$ 的定义域

例 1 求 $f(x, y) = \frac{\arcsin(3-x^2-y^2)}{\sqrt{x-y^2}}$ 的定义域.

$$\text{解 } \begin{cases} |3-x^2-y^2| \leq 1 \\ x-y^2 > 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 2 \leq x^2+y^2 \leq 4 \\ x > y^2 \end{cases}$$

所求定义域为

$$D = \{(x, y) | 2 \leq x^2 + y^2 \leq 4, x > y^2\}$$

(3) 二元函数 $z = f(x, y)$ 的图形及几何意义.

设函数 $z = f(x, y)$ 的定义域为 D , 对于任取 $p(x, y) \in D$, 对应的函数值为 $z = f(x, y)$, 这样, 以 x 为横坐标、 y 为纵坐标、 z 为竖坐标在空间就确定一点 $M(x, y, z)$, 当 (x, y) 取遍 D 上一点时, 得一个空间点集 $\{(x, y, z) | z = f(x, y), (x, y) \in D\}$, 这个点集称为二元函数的图形.

一般 $z = f(x, y)$ 为空间一个曲面, 例如函数 $z = 2x - y - 3$, $z = 1 - x^2 - y^2$ 的图形分别为平面和球面.

3 多元函数的极限

复习: 一元函数的极限 $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = A$

或 $\lim_{p \rightarrow p_0} (p) = A$

(1) 定义 设函数 $z = f(x, y)$ 的定义域为 D , $P_0(x_0, y_0)$ 是其聚点, 如果对于任意给定的正数 ε , 总存在正整数 δ , 使得对于适合不等式 $0 < |pp_0| \sqrt{(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2} < \delta$ 的一切点, 都有 $|f(x, y) - A| < \varepsilon$ 成立, 则称 A 为函数 $z = f(x, y)$ 当 $x \rightarrow x_0, y \rightarrow y_0$ 时的极限, 记为

$$\lim_{\substack{x \rightarrow x_0 \\ y \rightarrow y_0}} f(x, y) = A \text{ 或 } f(x, y) \rightarrow A (\rho \rightarrow 0)$$

这里 $\rho = |pp_0|$.

注意:

- ① 定义中 $p \rightarrow p_0$ 的方式是任意的;
- ② 二元函数的极限又称二重极限 $\lim_{\substack{x \rightarrow x_0 \\ y \rightarrow y_0}} f(x, y)$;
- ③ 二元函数的极限运算法则与一元函数类似.

(2) 求二元函数的极限: 利用一元函数求极限的方法和法则.

例 2 求极限 $\lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ y \rightarrow 0}} \frac{\sqrt{xy+1}-1}{x \cdot y}$

解 利用变量代换 $xy = t$

$$\text{原式} = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{\sqrt{t+1}-1}{t} = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{\frac{1}{2}t}{t} = \frac{1}{2}$$

(3) 极限不存在的判断

例 3 证明 $\lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ y \rightarrow 0}} \frac{x^3 y}{x^6 + y^2}$ 不存在.

$$\text{证 } \lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ y = kx^3}} \frac{x^3 kx^3}{x^6 + k^2 x^6} = \frac{k}{1+k^2}$$

其值随 k 的不同而变化, 故极限不存在.

注意: 确定极限不存在的方法:

①令 $p(x, y)$ 沿 $y = kx$ 趋向于 $P_0(x_0, y_0)$, 若极限值与 k 有关, 则断言极限不存在;

②找两种不同趋近方式, 使 $\lim_{\substack{x \rightarrow x_0 \\ y \rightarrow y_0}} f(x, y)$ 存在, 但两者不相等, 此时也可断言 $p(x, y)$ 在点 $P_0(x_0, y_0)$ 处极限不存在;

③利用两个累次极限不相等, 说明极限不存在.

利用点函数的形式有 n 元函数的极限定义.

定义 设 n 元函数 $f(P)$ 的定义域为点集 D , P_0 是其聚点, 如果对于任意给定的正数, 总存在正数 ε , 使得对于适合不等式 $0 < |PP_0| < \delta$ 的一切点 $p \in D$, 都有 $|f(p) - A| < \varepsilon$ 成立, 则称 A 为 n 元函数 $f(P)$ 当 $p \rightarrow p_0$ 时的极限, 记为 $\lim_{p \rightarrow p_0} f(p) = A$.

4 多元函数的连续性

复习:一元函数的连续

(1) 定义 设 n 元函数 $f(P)$ 的定义域为点集 D , p_0 是其聚点且 $p_0 \in D$, 如果 $\lim_{p \rightarrow p_0} f(p) = f(p_0)$ 则称 n 元函数 $f(P)$ 在点 p_0 处连续.

设 p_0 是函数 $f(P)$ 的定义域的聚点, 如 $f(P)$ 在点 p_0 处不连续, 则称 p_0 是函数 $f(P)$ 的间断点.

(2) 闭区域上连续函数的性质

①最大值和最小值定理: 在有界闭区域 D 上的多元连续函数, 在 D 上至少取得它的最大值和最小值各一次.

②介值定理: 在有界闭区域 D 上的多元连续函数, 如果在 D 上取得两个不同的函数值, 则它在 D 上取得介于这两值之间的任何值至少一次.

(3) 多元初等函数的连续性

多元初等函数: 由多元多项式及基本初等函数经过有限次的四则运算和复合步聚所构成的可用一个式子所表示的多元函数称为多元初等函数.

一切多元初等函数在其定义区域内是连续的, 定义区域是指包含在定义域内的区域或闭区域.

	计算 $\lim_{p \rightarrow p_0} f(p)$ 时, 如果 $f(p)$ 是初等函数, 且 p_0 是 $f(p)$ 定义域的内点, 则 $f(p)$ 在点 p_0 处连续, 于是 $\lim_{p \rightarrow p_0} f(p) = f(p_0)$. 思政元素: 通过多元函数求极限实例, 介绍简化问题的数学思想方法—降维. 培养学生的数学思维, 加深学生对数学思想的理解, 提高学生的认知水平和分析行为能力.
分析评价	本案例通过介绍多元函数微分学发展等历史, 坚定学生理想信念, 加强品德修养, 培养学生探索未知、追求真理的责任感和使命感, 培养学生孜孜以求的科学精神; 通过诗意教学表达数学思想文化; 培养学生利用类比思维提出问题、分析问题、解决问题的数学素养.
评价者	杨存典教授, 商洛学院学生处

案例编号	AME036
案例标题	偏导数
案例来源	购买
内容简介	通过实际问题，结合诗意教学，引入多元函数偏导数的概念. 利用诗意教学表达知识传授和数学思想，培养学生数学文化素养，提高学生的文化素质.
关键词	多元函数极限；偏导数
编写时间	2022-3-1
编著者	余亚辉等，洛阳理工学院
素材形式	文字等
育人主题	利用诗意教学表达知识传授和数学思想，培养学生数学文化素养，提高学生的文化素质.
素材长度	1506
案例正文	1 偏导数的定义及其计算方法 复习:一元函数导数的定义 $f'(x_0) = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)}{\Delta x}$ 二元函数的偏增量$\Delta_x z$、$\Delta_y z$与全增量 Δz 的概念. 由于多元函数自变量较多，如何分析函数值相对于自变量的变化率问题呢？ 思政元素 唐代诗人白居易在《钱塘湖春行》中写道:孤山寺北贾亭西，水面初平云脚低. 几处早莺争暖树，谁家新燕啄春泥. 乱花渐欲迷人眼，浅草才能没马蹄. 最爱湖东行不足，绿杨阴里白沙堤.  其中“乱花渐欲迷人眼，浅草才能没马蹄”指的是我们被乱花纷繁迷了眼睛，不知所措，花为何乱？指纷繁(变量过多，问题复杂)；

草为何浅？指选择(简化问题).

因此在研究多元函数导数问题时，可以先选择其中一个自变量的变化(比如变量 x)，并考虑其他变量不变，来简化问题，而这种多元函数的变化率称为偏导数.

(1) 定义 设函数 $z = f(x, y)$ ，在点 (x_0, y_0) 的某一邻域内有定义，当 y 固定在 y_0 ，而 x 在 x_0 处有增量 Δx 时，相应地函数有增量 $f(x_0 + \Delta x, y_0) - f(x_0, y_0)$ ，如果 $\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f(x_0 + \Delta x, y_0) - f(x_0, y_0)}{\Delta x}$ 存在，则称此极限为函数 $z = f(x, y)$ 在点 (x_0, y_0) 处对 x 的偏导数，记为

$$\left. \frac{\partial z}{\partial x} \right|_{x=x_0, y=y_0}, \left. \frac{\partial f}{\partial x} \right|_{x=x_0, y=y_0}, z_x|_{x=x_0, y=y_0} \text{ 或 } f_x(x_0, y_0)$$

同理可定义函数 $z = f(x, y)$ 在点 (x_0, y_0) 处对 y 的偏导数为

$$\lim_{\Delta y \rightarrow 0} \frac{f(x_0, y_0 + \Delta y) - f(x_0, y_0)}{\Delta y}, \text{ 记为 } \left. \frac{\partial z}{\partial y} \right|_{x=x_0, y=y_0}, \left. \frac{\partial f}{\partial y} \right|_{x=x_0, y=y_0}, z_y|_{x=x_0, y=y_0} \text{ 或 } f_y(x_0, y_0)$$

(2) 偏导函数如果函数 $z = f(x, y)$ 在区域 D 内任一点 (x, y) 处对 x 的偏导数都存在，那么这个偏导数就是 x 、 y 的函数，它就称为函数 $z = f(x, y)$ 对自变量 x 的偏导函数(简称偏导数)，记作 $\frac{\partial z}{\partial x}$, $\frac{\partial f}{\partial x}$ 或 $f_x(x, y)$

同理可以定义函数 $z = f(x, y)$ 对自变量 y 的偏导数，记作 $\frac{\partial z}{\partial y}$, $\frac{\partial f}{\partial y}$ 或 $f_y(x, y)$ 偏导数的概念可以推广到二元以上函数，如 $u = f(x, y, z)$ 在 (x, y, z) 处

$$f_x(x, y, z) = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f(x + \Delta x, y, z) - f(x, y, z)}{\Delta x}$$

$$f_y(x, y, z) = \lim_{\Delta y \rightarrow 0} \frac{f(x, y + \Delta y, z) - f(x, y, z)}{\Delta y}$$

$$f_z(x, y, z) = \lim_{\Delta z \rightarrow 0} \frac{f(x, y, z + \Delta z) - f(x, y, z)}{\Delta z}$$

(3) 求偏导数的方法一元函数的求导方法(视其他变量为常数).

例 4 求 $z = x^2 + 3xy + y^2$ 在点 $(1, 2)$ 处的偏导数.

解

$$\frac{\partial z}{\partial x} = 2x + 3y; \quad \frac{\partial z}{\partial y} = 3x + 2y;$$

$$\left. \frac{\partial z}{\partial x} \right|_{x=1, y=2} = 2 \times 1 + 3 \times 2 = 8,$$

$$\left. \frac{\partial z}{\partial y} \right|_{\substack{x=1 \\ y=2}} = 3 \times 1 + 2 \times 2 = 7.$$

例 5 设 $z = x^y (x > 0, x \neq 1)$, 求证

$$\frac{x}{y} \cdot \frac{\partial z}{\partial x} + \frac{1}{\ln x} \cdot \frac{\partial z}{\partial y} = 2z$$

证明 $\frac{\partial z}{\partial x} = yx^{y-1}, \frac{\partial z}{\partial y} = x^y \ln x$

$$\begin{aligned} \frac{x}{y} \cdot \frac{\partial z}{\partial x} + \frac{1}{\ln x} \cdot \frac{\partial z}{\partial y} \\ = \frac{x}{y} \cdot yx^{y-1} + \frac{1}{\ln x} \cdot x^y \ln x = 2z \end{aligned}$$

故原结论成立.

有关偏导数的几点说明:

①偏导数 $\frac{\partial z}{\partial x}$ 是一个整体记号, 不能拆分;

②求分界点, 不连续点处的偏导数要用定义求.

例 6 设 $f(x, y) = \begin{cases} \frac{xy}{x^2+y^2} & (x, y) \neq (0, 0) \\ 0 & (x, y) = (0, 0) \end{cases}$ 求 $f(x, y)$ 的偏导数及在 $(0, 0)$

的连续性.

解 当 $(x, y) \neq (0, 0)$ 时

$$f_x(x_0, y_0) = \frac{y(x^2 + y^2) - 2x \cdot xy}{(x^2 + y^2)^2} = \frac{y(y^2 - x^2)}{(x^2 + y^2)^2}$$

$$f_y(x_0, y_0) = \frac{x(x^2 + y^2) - 2y \cdot xy}{(x^2 + y^2)^2} = \frac{x(x^2 - y^2)}{(x^2 + y^2)^2}$$

当 $(x, y) = (0, 0)$ 时, 按定义可知

$$f_x(0, 0) = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f(\Delta x, 0) - f(0, 0)}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{0}{\Delta x} = 0$$

$$f_y(0, 0) = \lim_{\Delta y \rightarrow 0} \frac{f(0, \Delta y) - f(0, 0)}{\Delta y} = \lim_{\Delta y \rightarrow 0} \frac{0}{\Delta y} = 0$$

沿 $x = ky$ 趋于 $(0, 0)$ 时, $\frac{xy}{x^2+y^2} \rightarrow \frac{k}{1+k^2}$, 所以不连续.

思政元素

偏导数理论是由欧拉和法国数学家方丹、克莱罗与达朗贝尔在早期偏微分方程的研究中建立起来的. 欧拉在关于流体力学的一系列文章中给出了偏导数运算法则、复合函数偏导数等有关的运算, 而我们现在使用的偏导数符号则是直到 19 世纪 40 年代, 才由雅可比在其行列式理论中提出并逐渐推广使用至今.



(4) 偏导数存在与连续的关系

一元函数中在某点可导，函数在该点一定连续，但多元函数中在某点导数存在，函数未必连续。

例 6 中函数

$$f(x, y) = \begin{cases} \frac{xy}{x^2+y^2}, & x^2 + y^2 \neq 0 \\ 0, & x^2 + y^2 = 0 \end{cases} \text{ 在 } (0, 0) \text{ 处有 } f_x(0,0) = 0, f_y(0,0) = 0$$

但函数在该点处并不连续。

2 高阶偏导数

函数 $z = f(x, y)$ 的二阶偏导数为 $\frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial z}{\partial x} \right) = \frac{\partial^2 z}{\partial x^2} = f_{xx}(x, y)$,

$$\frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{\partial z}{\partial y} \right) = \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = f_{yy}(x, y) \text{ 纯偏导;}$$

$$\frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{\partial z}{\partial x} \right) = \frac{\partial^2 z}{\partial y \partial x} = f_{xy}(x, y),$$

$$\frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial z}{\partial y} \right) = \frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} = f_{yx}(x, y) \text{ 混合偏导。}$$

定义 2 二阶及二阶以上的偏导数统称为高阶偏导数。

例 7 设 $u = e^{ax} \cos by$ ，求二阶偏导数。

解 $\frac{\partial u}{\partial x} = ae^{ax} \cos by$;

$$\frac{\partial u}{\partial y} = -be^{ax} \sin by ;$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = a^2 e^{ax} \cos by;$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = -b^2 e^{ax} \cos by;$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial xy} = -abe^{ax} \sin by;$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial yx} = -abe^{ax} \sin by;$$

问题：混合偏导数都相等吗？

例 8 设 $f(x, y) = \begin{cases} \frac{xy}{x^2+y^2} & (x, y) \neq (0, 0) \\ 0 & (x, y) = (0, 0) \end{cases}$, 求 $f(x, y)$ 的一阶偏导数及

$(0, 0)$ 点二阶混合偏导数.

解 当 $(x, y) \neq (0, 0)$ 时,

$$f_x(x, y) = \frac{3x^2y(x^2+y^2) - 2xx^3y}{(x^2+y^2)^2} = \frac{3x^2y^3 + x^4y}{(x^2+y^2)^2}$$

$$f_y(x, y) = \frac{x^5 - x^3y^2}{(x^2+y^2)^2}$$

当 $(x, y) = (0, 0)$ 时, 按定义可知:

$$f_x(0, 0) = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f(\Delta x, 0) - f(0, 0)}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{0}{\Delta x} = 0$$

$$f_y(0, 0) = \lim_{\Delta y \rightarrow 0} \frac{f(0, \Delta y) - f(0, 0)}{\Delta y} = \lim_{\Delta y \rightarrow 0} \frac{0}{\Delta y} = 0$$

$$f_{xy}(0, 0) = \lim_{\Delta y \rightarrow 0} \frac{f_x(0, \Delta y) - f_x(0, 0)}{\Delta y} = 0$$

$$f_{yx}(0, 0) = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f_y(\Delta x, 0) - f_y(0, 0)}{\Delta x} = 1$$

显然 $f_{xy}(0, 0) \neq f_{yx}(0, 0)$

问题: 具备怎样的条件才能使混合偏导数相等?

定理 如果函数 $z = f(x, y)$ 的两个二阶混合偏导数 $\frac{\partial^2 z}{\partial y \partial x}$ 及 $\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y}$ 在区域 D 内连续, 那么在该区域内这两个二阶混合偏导数必相等.

例 9 证明 满足方程 $u = \frac{1}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}}$ 满足方程 $\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} = 0$

证明

$$\frac{\partial u}{\partial x} = -\frac{x}{(x^2+y^2+z^2)^{\frac{3}{2}}}$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = -\frac{1}{(x^2+y^2+z^2)^{\frac{3}{2}}} + \frac{3x^2}{(x^2+y^2+z^2)^{\frac{5}{2}}}$$

而函数关于自变量具有对称性, 因此

$$\frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = -\frac{1}{(x^2+y^2+z^2)^{\frac{3}{2}}} + \frac{3y^2}{(x^2+y^2+z^2)^{\frac{5}{2}}}$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial z^2} = -\frac{1}{(x^2+y^2+z^2)^{\frac{3}{2}}} + \frac{3z^2}{(x^2+y^2+z^2)^{\frac{5}{2}}}$$

所以有 $\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} = 0$

思政元素

此方程称为拉普拉斯方程, 它是由皮埃尔-西蒙·拉普拉斯

	(<i>Pierre-Simon Laplace</i>) 首先提出而得名的. 拉普拉斯方程又称调和方程、位势方程, 它位列三大偏微分方程之首, 也称椭圆方程, 它存在于电磁学, 存在于流体力学, 存在于万有引力, 存在于热力学, 也存在于表面张力里.  拉普拉斯 (1749—1827) 拉普拉斯 (1749—1827 是一位世界著名的法国数学家, 24 岁就解决了当时著名难题: 木星轨道收缩和土星轨道膨胀问题, 在 1799 年, 他证明了在天文时间单位里, 太阳系是一个稳定的系统, 推翻了一个世纪前牛顿的假设.) 在这个过程中, 拉普拉斯方程诞生了. 拉普拉斯对人类的贡献遍及工程、数学、统计学、物理学、天文学和哲学, 被称为“法国的牛顿”.
分析评价	本案例通过介绍偏导数理论发展与完善的历史, 让学生了解偏导数理论发展脉络. 学习优秀科学家孜孜以求的科学精神, 培养学生探索未知、追求真理的责任感和使命感.
评价者	杨存典教授, 商洛学院学生处

案例编号	AME037
案例标题	隐函数求导
案例来源	原创
内容简介	本案例讲解隐函数求导的相关定理和性质，列举相关例题和应用案例来深化定理和性质。
关键词	隐函数；求导
编写时间	2021-06-14
编著者	马春洁助教，数学与计算机应用学院
素材形式	文字、图片等
育人主题	通过学习，让学生们感受到千千万万普通人的伟大之处，牢记习总书记的号召，立志高远，与此同时，做好小事，管好小节，方能有小到大育德立业。
素材长度	1135
案例正文	一、读史明理，引出隐函数求导问题 笛卡尔于1596年生于法国西部图兰省和布瓦杜省交界处的拉埃镇（今名拉埃—笛卡尔镇）的一个绅士家庭。1岁多时母亲患肺结核去世，而他也受到传染，造成体弱多病。由于家境殷实，这些均没能影响其一生的建树，他对现代数学的发展做出了重要的贡献，因将几何坐标体系公式化而被认为是解析几何之父。他还是西方现代哲学思想的奠基人之一，是近代唯物论的开拓者，提出了“普遍怀疑”的主张。他的哲学思想深深影响了之后的几代欧洲人，并为欧洲的“理性主义”哲学奠定了基础。笛卡尔最为世人熟知的是其作为数学家的成就。他于1637年发明了现代数学的基础工具之一——坐标系，将几何和代数相结合，创立了解析几何学。同时，他也推导出了笛卡尔定理等几何学公式。本节主要从笛卡尔叶形线的隐函数求导问题说起。 思政元素 科学精神 思政目标 用数学家的成功经历鼓励和鞭策学生努力学习，立志成才。如笛卡尔，在学习中和学生分享数学家的奋斗故事。希望通过数学家的事迹，鼓励大学生克服自身不足，端正态度，踏踏实实学习。 二、总结史话，引出概念 在第二章第六节中我们已经提出了隐函数的概念，并且指出了不经过显化直接由方程 $f(x, y) = 0 \quad (1)$ 求它所确定的隐函数的方法。现在介绍隐函数存在定理，并根据多元复合函数的求导法来导出隐函数的导数公式。 隐函数存在定理 1 设函数 $F(x, y)$ 在点 $P(x_0, y_0)$ 的某一邻域内具有连续的偏导数，且 $F(x_0, y_0) = 0$，$F_y(x_0, y_0) \neq 0$，则方程 $F(x, y) = 0$ 在点 (x_0, y_0) 的某一邻域内恒能唯一确定一个单值连续且具有连续导

数的函数 $y = f(x)$ ，它满足条件 $y_0 = f(x_0)$ ，并有

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{F_x}{F_y} \quad (2)$$

公式 (2) 就是隐函数的求导公式。

将方程 (1) 所确定的函数 $y = f(x)$ 代入，得恒等式 $F(x, f(x)) \equiv 0$ ，

其左端可以看作是 x 的一个复合函数，求这个函数的全导数，由于恒

等式两端求导后仍然恒等，即得 $\frac{\partial F}{\partial x} + \frac{\partial F}{\partial y} \frac{dy}{dx} = 0$ 。

由于 F_y 连续，且 $F_y(x_0, y_0) \neq 0$ ，所以存在 (x_0, y_0) 的一个邻域，在这

个邻域内 $F_y \neq 0$ ，于是得 $\frac{dy}{dx} = -\frac{F_x}{F_y}$ 。

如果 $F(x, y)$ 的二阶偏导数也都连续，我们可以把等式 (2) 的两端看作 x 的复合函数而再一次求导，即得

$$\begin{aligned} \frac{d^2 y}{dx^2} &= \frac{\partial}{\partial x} \left(-\frac{F_x}{F_y} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left(-\frac{F_x}{F_y} \right) \frac{dy}{dx} \\ &= -\frac{F_{xx}F_y - F_{yx}F_x}{F_y^2} - \frac{F_{xy}F_y - F_{yy}F_x}{F_y^2} \left(-\frac{F_x}{F_y} \right) \\ &= -\frac{F_{xx}F_y^2 - 2F_{xy}F_xF_y + F_{yy}F_x^2}{F_y^3}. \end{aligned}$$

隐函数存在定理 2 设函数 $F(x, y, z)$ 在点 $P(x_0, y_0, z_0)$ 的某一邻域内具有连续的偏导数，且 $F(x_0, y_0, z_0) = 0$ ， $F_z(x_0, y_0, z_0) \neq 0$ ，则方程 $F(x, y, z) = 0$ 在点 (x_0, y_0, z_0) 的某一邻域内恒能唯一确定一个单值连续且具有连续偏导数的函数 $z = f(x, y)$ ，它满足条件 $z_0 = f(x_0, y_0)$ ，并有

$$\frac{\partial z}{\partial x} = -\frac{F_x}{F_z}, \quad \frac{\partial z}{\partial y} = -\frac{F_y}{F_z}.$$

思政元素：辩证思维。

思政目标：培养学生持之以恒、坚持不懈的品质精神，培养学生能够辩证的全面的思考问题。

三、深化概念，探讨性质

下面我们将隐函数存在定理作另一方面的推广。我们不仅增加方程中变量的个数。而且增加方程的个数，例如，考虑方程组
这时，在四个变量中，一般只能有两个变量独立变化，因此方程组(3)就有可能确定两个二元函数。在这种情形下，我们可以由函数 F 、 G 的性质来断定由方程组(3)所确定的两个二元函数的存在，以及它们的性质。我们有下面的定理。

隐函数存在定理 3 设函数 $F(x, y, u, v)$ 、 $G(x, y, u, v)$ 在点 $P_0(x_0, y_0, u_0, v_0)$ 的某一邻域内所有偏导数都连续，又 $F(x_0, y_0, u_0, v_0) = 0$ ， $G(x_0, y_0, u_0, v_0) = 0$ ，且偏导数所组成的函数行列式(或称雅可比(Jacobi)式)：

$$J = \frac{\partial(F, G)}{\partial(u, v)} = \begin{vmatrix} \frac{\partial F}{\partial u} & \frac{\partial F}{\partial v} \\ \frac{\partial G}{\partial u} & \frac{\partial G}{\partial v} \end{vmatrix}$$

在点 $P_0(x_0, y_0, u_0, v_0)$ 不等于零，则方程组 $F(x, y, u, v) = 0$ ， $G(x, y, u, v) = 0$ 在点 $P_0(x_0, y_0, u_0, v_0)$ 的某一邻域内恒能唯一确定一组单值连续且具有连续偏导数的函数 $u = u(x, y)$ ， $v = v(x, y)$ ，使得 $u_0 = u(x_0, y_0)$ ， $v_0 = v(x_0, y_0)$ ，并有

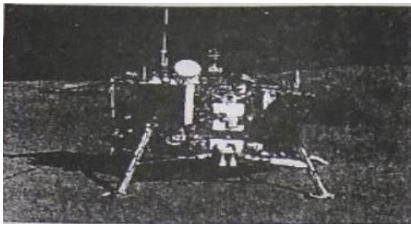
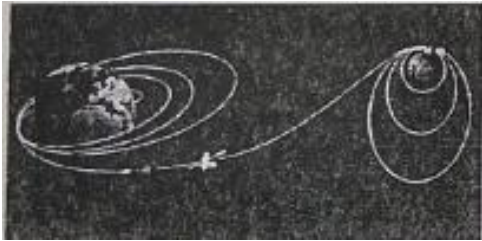
$$\frac{\partial u}{\partial x} = -\frac{1}{J} \frac{\partial(F, G)}{\partial(x, v)} = -\frac{\begin{vmatrix} F_x & F_v \\ G_x & G_v \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} F_u & F_v \\ G_u & G_v \end{vmatrix}}, \quad \frac{\partial v}{\partial x} = -\frac{1}{J} \frac{\partial(F, G)}{\partial(u, x)} = -\frac{\begin{vmatrix} F_u & F_x \\ G_u & G_x \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} F_u & F_v \\ G_u & G_v \end{vmatrix}},$$
$$\frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{1}{J} \frac{\partial(F, G)}{\partial(y, v)} = -\frac{\begin{vmatrix} F_y & F_v \\ G_y & G_v \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} F_u & F_v \\ G_u & G_v \end{vmatrix}}, \quad \frac{\partial v}{\partial y} = -\frac{1}{J} \frac{\partial(F, G)}{\partial(u, y)} = -\frac{\begin{vmatrix} F_u & F_y \\ G_u & G_y \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} F_u & F_v \\ G_u & G_v \end{vmatrix}}.$$

四、巩固练习，拓展应用

五、设方程组 $\begin{cases} x^2 + y^2 - uv = 0 \\ xy - u^2 + v^2 = 0 \end{cases}$ ，求 $\frac{\partial u}{\partial x}$ ， $\frac{\partial u}{\partial y}$ ， $\frac{\partial v}{\partial x}$ 和 $\frac{\partial v}{\partial y}$ 。

解 根据所求的偏导数可知，变量 u, v 可看作 x, y 的函数，将所给方程的两边对 x 求导并移项，得案例的详细表述，字数以 1000-3000 字为宜(可续页)

	$\begin{cases} v \frac{\partial u}{\partial x} + u \frac{\partial v}{\partial x} = 2x \\ 2u \frac{\partial u}{\partial x} - 2v \frac{\partial v}{\partial x} = y. \end{cases}$ 从而，解得 ($u^2 + v^2 \neq 0$) $\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\begin{vmatrix} 2x & u \\ y & -2v \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} v & u \\ 2u & -2v \end{vmatrix}} = \frac{4xv + yu}{2(u^2 + v^2)}, \quad \frac{\partial v}{\partial x} = \frac{\begin{vmatrix} v & 2x \\ 2u & y \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} v & u \\ 2u & -2v \end{vmatrix}} = \frac{4xu - yv}{2(u^2 + v^2)},$ 同理，将所给的方程两边对 y 求导，可得 $\frac{\partial u}{\partial y} = \frac{xu + 4yv}{2(u^2 + v^2)}, \quad \frac{\partial v}{\partial y} = \frac{4yu - xv}{2(u^2 + v^2)}. (u^2 + v^2 \neq 0)$
分析评价	本案例从数学家的成功经历出发，让学生通过数学家的事迹，鼓励大学生克服自身不足，端正态度，踏踏实实学习。讲解隐函数求导的相关定理和性质，列举相关例题和应用案例来深化定理和性质。通过学习，让学生们感受到千千万万普通人的伟大之处，牢记习总书记的号召，立志高远，与此同时，做好小事，管好小节，方能有小到大育德立业。
评价者	杨存典教授，商洛学院学生处

案例编号	AME038
案例标题	空间曲线的切线与法平面
案例来源	购买
内容简介	通过中国骄傲-嫦娥探月工程中探测器的变轨问题引入教学内容. 使学生感受数学知识的实用性并积极主动去探索及解决问题, 培养学生科技报国的家国情怀和使命担当.
关键词	空间曲线的切线; 法平面
编写时间	2022-3-1
编著者	余亚辉等, 洛阳理工学院
素材形式	文字等
育人主题	使学生感受数学知识的实用性并积极主动去探索及解决问题, 培养学生科技报国的家国情怀和使命担当.
素材长度	1106
	问题引入 嫦娥五号是中国探月工程三期发射的月球探测器, 为中国首个实施无人月面取样返回的探测器, 由中国空间技术研究院研制, 于 2020 年 11 月 24 日成功发射, 其主要任务是展开着陆点区的形貌探测和地质背景勘测, 获取与月球样品相关的现场分析数据, 建立现场探测数据与实验室分析数据之间的联系. 2020 年 12 月 17 日凌晨, 嫦娥五号返回器携带月球样品以接近   第二宇宙速度返回地球, 按照预定方案降落在内蒙古四子王旗着陆场, 这是人类探月历史 60 年来由中国人书写的又一壮举, 标志着中国探月工程“绕、落、回”三步走收官之战取得圆满胜利. 嫦娥探测器在太空的运动轨迹是怎么样的? 是直接发射到月球

的吗？答案是否定的，以嫦娥一号为例，它要绕地进行三次轨道机动. 第一次变轨时，是远地点点火，然后抬升近地点高度，嫦娥一号为了变成绕月飞行的卫星，还需在近月点做三次减速机动，机动后的轨道周期相继是 12 小时、3.5 小时和 127 分钟. 在每次变轨机动时，其控制都与运动轨迹的切线方向有关. 那么空间曲线的切线又如何计算？

1 空间曲线的切线与法平面

复习：空间曲线的方程和曲面的方程的表现形式，假设空间曲线的方程为 $\begin{cases} y = \phi(t) \\ y = \psi(t) \\ z = \omega(t) \end{cases}$ ，其中的三个函数均可导.

设 $M(x_0, y_0, z_0)$ 对应于 $t = t_0$ ；

$M'(x_0 + \Delta x, y_0 + \Delta y, z_0 + \Delta z)$ 对应于 $t = t_0 + \Delta t$ ，割线 MM' 的方程为

$$\frac{x - x_0}{\Delta x} = \frac{y - y_0}{\Delta y} = \frac{z - z_0}{\Delta z}$$

考察割线趋近于极限位置——切线的过程，上式分母同除以 Δt ，则有

$$\frac{x - x_0}{\Delta x / \Delta t} = \frac{y - y_0}{\Delta y / \Delta t} = \frac{z - z_0}{\Delta z / \Delta t}$$

当 $M' \rightarrow M$ ，即 $\Delta t \rightarrow 0$ 时，曲线在 M 处的切线方程为

$$\frac{x - x_0}{\phi'(t_0)} = \frac{y - y_0}{\psi'(t_0)} = \frac{z - z_0}{\omega'(t_0)}$$

切向量：切线的方向向量称为曲线的切向量.

$$\vec{T} = \{\phi'(t_0), \psi'(t_0), \omega'(t_0)\}$$

法平面：过 M 点且与切线垂直的平面.

$$\phi'(t_0)(x - x_0) + \psi'(t_0)(y - y_0) + \omega'(t_0)(z - z_0) = 0$$

2 曲面的切平面与法线

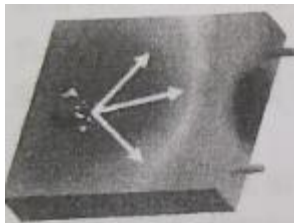
设曲面方程为 $F(x, y, z) = 0$ ，在曲面上任取一条通过点 M 的曲线

$$\Gamma: \begin{cases} y = \phi(t) \\ y = \psi(t) \\ z = \omega(t) \end{cases}, \text{ 曲线在 } M \text{ 处的切向量为}$$

$$\vec{T} = \{\phi'(t_0), \psi'(t_0), \omega'(t_0)\}$$

令

	$\vec{n} = \{F_x(x_0, y_0, z_0), F_y(x_0, y_0, z_0), F_z(x_0, y_0, z_0)\}$ 则$\vec{n} \perp \vec{T}$，由于曲线是曲面上通过点M的任意一条曲线，它们在点M的切线都与同一向量$\vec{n}$垂直，故曲面上通过点M的一切曲线在点M的切线都在同一平面上，这个平面都称为曲面在点M的切平面. 垂直于曲面上切平面的向量成为曲面的法向量。通过点$M(x_0, y_0, z_0)$而垂直于切平面的直线称为曲面在该点的法线. 曲面在点M处切平面方程为 $F_x(x_0, y_0, z_0)(x - x_0) + F_y(x_0, y_0, z_0)(y - y_0) + F_z(x_0, y_0, z_0)(z - z_0) = 0$ 法向量为 $\vec{n} = \{F_x(x_0, y_0, z_0), F_y(x_0, y_0, z_0), F_z(x_0, y_0, z_0)\}$ 法线方程为 $\frac{x - x_0}{F_x(x_0, y_0, z_0)} = \frac{y - y_0}{F_y(x_0, y_0, z_0)} = \frac{z - z_0}{F_z(x_0, y_0, z_0)}$
分析评价	本案例通过中国骄傲-嫦娥探月工程中探测器的变轨问题引入空间曲线的切线与法平面问题. 使学生感受数学知识的实用性并积极主动去探索及解决问题，培养学生科技报国的家国情怀和使命担当.
评价者	杨存典教授，商洛学院学生处

案例编号	AME039
案例标题	方向导数与梯度
案例来源	购买
内容简介	通过蚂蚁逃生问题讨论，对学生进行科学思维方法的训练和科学伦理的教育.
关键词	方向导数；梯度
编写时间	2022-3-1
编著者	余亚辉等，洛阳理工学院
素材形式	文字等
育人主题	对学生进行科学思维方法的训练和科学伦理的教育.
素材长度	1106
案例正文	1. 方向导数 引入问题（蚂蚁逃生问题）：  假设一个金属板下面有一团火焰，它使金属板受热，假定金属板的温度分布函数$T(x, y) = \frac{1}{\sqrt{x^2+y^2}}$，其中$(x, y)$为金属板上点坐标值，在金属板某一处有一只蚂蚁，问这只蚂蚁应沿什么方向爬行才能最快到达较凉快的地方？该问题实质上讨论的是函数$f(x, y)$在某一点P沿某一方向的变化率. 定义 1 函数的增量$f(x + \Delta x, y + \Delta y) - f(x, y)$与$PP'$两点间的距离$\rho = \sqrt{(\Delta x)^2 + (\Delta y)^2}$之比值，当$P'$沿着$l$趋于$P$时，如果此式的极限存在，则称这极限为函数在点$P$沿方向$l$的方向导数. 记为$\frac{\partial f}{\partial l} = \lim_{\rho \rightarrow 0} \frac{f(x+\Delta x, y+\Delta y) - f(x, y)}{\rho}$. 依定义，函数$f(x, y)$在点$P$沿着$x$轴正方向$\vec{e}_1 = \{1, 0\}$、$y$轴正向$\vec{e}_2 = \{0, 1\}$的方向导数分别为$f_x$、$f_y$；沿着$x$负向、$y$轴负向的方向导数是$-f_x$、$-f_y$.

定理 1 如果函数 $z = f(x, y)$ 在点 $P(x_0, y_0)$ 是可微分的, 那么函数在该点沿任意方向 l 的方向导数都存在, 且有 $\frac{\partial f}{\partial l} = \frac{\partial f}{\partial x} \cos \alpha + \frac{\partial f}{\partial y} \cos \beta$, 其中 $\vec{e}_l = (\cos \alpha, \cos \beta)$.



思政元素

对于二元函数, 某某一点沿着不同方向, 它的方向导数往往不相同, 正像苏轼在《题西林壁》所说: “横看成岭侧成峰, 远近高低各不同. 不识庐山真面目, 只缘身在此山中.” 从不同角度看庐山, 坡度不同.

例 1 求函数 $f(x, y) = xy$ 在点 $(1, 1)$ 沿方向 $\vec{e}_l = (\cos \varphi, \sin \varphi)$ 的方向导数, 并问在怎样的方向上此方向导数有

(1) 最大值; (2) 最小值; (3) 等于 0? (φ 为 x 轴正向到射线的转角)

解 由方向导数的计算公式知

$$\begin{aligned} \left. \frac{\partial f}{\partial l} \right|_{(1,1)} &= f_x(1,1) \cos \alpha + f_y(1,1) \sin \alpha \\ &= y|_{(1,1)} \cos \varphi + x|_{(1,1)} \sin \varphi \\ &= \cos \varphi + \sin \varphi = \sqrt{2} \sin \left(\varphi + \frac{\pi}{4} \right) \end{aligned}$$

故 (1) 当 $\varphi = \frac{\pi}{4}$ 时, 方向导数达到最大值 $\sqrt{2}$;

(2) 当 $\varphi = \frac{5\pi}{4}$ 时, 方向导数达到最小值 $-\sqrt{2}$;

(3) 当 $\varphi = \frac{3\pi}{4}$ 和 $\varphi = \frac{7\pi}{4}$ 时, 方向导数等于 0.

2. 梯度

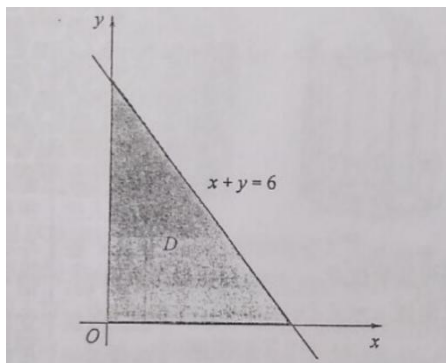
问题: 函数在点 P 沿哪一方向增加的速度最快?

定义 2 设函数 $z = f(x, y)$ 在平面区域内 D 内具有一阶连续偏导数, 则对于每一点 $P = (x, y) \in D$, 都可定出一个向量 $\frac{\partial f}{\partial x} \vec{i} = \frac{\partial f}{\partial y} \vec{j}$, 该

	向量称为函数$z = f(x, y)$在点$P(x, y)$的梯度，记为 $\text{grad } f(x, y) = \frac{\partial f}{\partial x} \vec{i} + \frac{\partial f}{\partial y} \vec{j}$ 设$\vec{e} = \cos \alpha \vec{i} + \cos \beta \vec{j}$ 是方向$\vec{l}$上的单位向量，由方向导数公式知 $\begin{aligned} \frac{\partial f}{\partial l} &= \frac{\partial f}{\partial x} \cos \alpha + \frac{\partial f}{\partial y} \cos \beta = \left\{ \frac{\partial f}{\partial x}, \frac{\partial f}{\partial y} \right\} \cdot \{ \cos \alpha, \cos \beta \} \\ &= \text{grad } f(x, y) \cdot \vec{e} \\ &= \text{grad } f(x, y) \cos \theta \end{aligned}$ 其中 $\theta = [\text{grad } f(x, y) \cdot \vec{e}]$ 当$\cos[\text{grad } f(x, y) \cdot \vec{e}] = 1$ 时，$\frac{\partial f}{\partial l}$有最大值. 结论：函数在某一点的梯度是这样一个向量，它的方向与取得最大方向导数的方向一致，而它的模为方向导数的最大值，梯度的模为 $ \text{grad } f(x, y) = \sqrt{\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)^2}$ 当不为零时，x轴到梯度的转角的正切为$\tan \theta = \frac{\frac{\partial f}{\partial y}}{\frac{\partial f}{\partial x}}$. 由梯度定义可知，蚂蚁逃生问题的答案是蚂蚁应沿温度函数$T(x, y)$在蚂蚁初始位置处梯度的反方向（即又热变冷变化最剧烈的方向）爬行，就能最快到达较凉快的地方. 思政元素 利用蚂蚁逃生问题的方法论启示，对学生进行人生观和科学伦理教育. 人们常说:成功的道路没有捷径可以走！但是掌握科学的方法，却能帮你提高效率. 通过蚂蚁逃生问题讨论，对学生进行科学思维方法的训练和科学伦理的教育.
分析评价	通过蚂蚁逃生问题讨论，学习了方向导数与梯度的概念。对学生进行科学思维方法的训练和科学伦理的教育.
评价者	杨存典教授，商洛学院学生处

案例编号	AME040
案例标题	多元函数的极值和最值
案例来源	购买
内容简介	利用极值与最值概念对比，延展出局部与整体的思想，对学生进行人生观、价值观教育.
关键词	多元函数；极值；最值
编写时间	2022-3-1
编著者	余亚辉等，洛阳理工学院
素材形式	文字等
育人主题	对学生进行人生观、价值观教育
素材长度	1306
案例正文	1. 多元函数的极值和最值 (1) 二元函数极值的定义 定义 3 设函数$z = f(x, y)$在点(x_0, y_0)的某邻域内有定义, 对于该邻域内异于(x_0, y_0)的点(x, y): 若满足不等式$f(x, y) < f(x_0, y_0)$, 则称函数在(x_0, y_0)有极大值; 若满足不等式$f(x, y) > f(x_0, y_0)$, 则称函数在(x_0, y_0)有极小值; 极大值、极小值统称为极值. 使函数取得极值的点称为极值点. 例 2 函数$z = 3x^2 + y^2$在$(0, 0)$处有极小值. 例 3 函数$z = -\sqrt{x^2 + 3y^2}$在$(0, 0)$处有极大值. 例 4 函数$z = 4xy$在$(0, 0)$处没有极值. ; (2) 多元函数取得极值的条件 定理 2 (必要条件) 设函数$z = f(x, y)$在点(x_0, y_0)具有偏导数, 且在点(x_0, y_0)处有极值, 则它在该点的偏导数必然为零: $F_x(x_0, y_0) = 0, F_y(x_0, y_0) = 0$ 驻点: 凡能使一阶偏导数同时为零的点, 称为函数的驻点. 注意: 具有偏导数的函数的极值点为驻点; 驻点不一定是极值点. 例如: 点$(0, 0)$是函数$z = xy$的驻点, 但不是极值点. 问题: 如何判定一个驻点是否为极值点? 定理 3 (充分条件) 设函数$z = f(x, y)$在点(x_0, y_0)的某邻域内连

	续，有一阶及二阶连续偏导数，又$f_x(x_0, y_0) = 0$，$f_y(x_0, y_0) = 0$，令$f_{xx}(x_0, y_0) = A$，$f_{xy}(x_0, y_0) = B$，$f_{yy}(x_0, y_0) = C$，则$f(x, y)$在点(x_0, y_0)处是否取得极值的条件如下： ①$AC - B^2 > 0$ 时具有极值，当$A < 0$ 时有极大值，当$A > 0$ 时有极小值； ②$AC - B^2 < 0$ 时没有极值； ③$AC - B^2 = 0$ 时可能有极值，也可能没有极值，还需另作讨论. 求函数$z = f(x, y)$极值的一般步骤： ①解方程组 $f_x(x_0, y_0) = 0$，$f_y(x_0, y_0) = 0$ 求出实数解，得驻点； ②对于每一个驻点(x_0, y_0)，求出二阶偏导数的值 A、B、C； ③定出$AC - B^2$的符号，再判定是否是极值. (3) 多元函数的最大值和最小值 与一元函数相类似，我们可以利用函数的极值来求函数的最大值和最小值. 求最值的一般方法： 将函数在 D 内的所有驻点处的函数值及在 D 的边界上的最大值和最小值相互比较，其中最大者即为最大值，最小者即为最小值. 例 5 求二元函数 $z = f(x, y) = x^2y(4 - x - y)$ 在直线 $x + y = 6$，x 轴和 y 轴所围成的闭区域 D 上的最大值与最小值. 解 先求函数在 D 内的驻点，解方程组 $f_x(x, y) = 2xy(4 - x - y) - x^2y = 0$ $f_y(x, y) = x^2(4 - x - y) - x^2y = 0$ 得区域 D 内唯一驻点$(2, 1)$，且 $f(2, 1) = 4$ 再求 $f(x, y)$ 在 D 边界上的最值： 在边界 $x=0$ 和 $y=0$ 上 $f(x, y) = 0$，
--	---



在边界 $x + y = 6$ 上, $y = 6 - x$, 则 $f(x, y) = x^2(6 - x)(-2)$, 由 $f_x = 4x(x - 6) - 2x^2 = 0$ 得 $x_1 = 4, x_2 = 4 \Rightarrow y = 6 - x = 2$, 比较后可知 $f(2, 1) = 4$ 为最大值, $f(4, 2) = -64$ 为最小值.

思政元素: 利用极值与最值概念对比, 延展出局部与整体的思想, 对学生进行人生观、价值观教育.

2. 条件极值、拉格朗日乘数法

实例 小王有 200 元钱, 他决定用来购买两种急需物品: 磁盘和磁带, 设他购买 x 张磁盘, y 盒磁带达到最佳效果, 效果函数 $U(x, y) = \ln x + \ln y$ 设每张磁盘 8 元, 每盒磁带 10 元, 问他如何分配这 200 元以达到最佳效果.

问题的实质: 求 $U(x, y) = \ln x + \ln y$ 在条件 $8x + 10y = 200$ 下的极值点.

无条件极值: 对自变量除了限制在定义域内外, 并无其他条件.

条件极值: 对自变量有附加条件的极值.

拉格朗日乘数法: 要找函数 $z = f(x, y)$ 在条件 $\varphi(x, y) = 0$ 下的可能极值点, 即极值的必要条件, 因为

$$f_x + f_y \frac{dy}{dx} = 0, \quad \frac{dy}{dx} = -\frac{\varphi_x}{\varphi_y}, \quad \text{记 } -\frac{f_y}{\varphi_y} = \lambda \text{ 即}$$

$$\begin{cases} f_x + \lambda \varphi_x = 0 \\ f_y + \lambda \varphi_y = 0 \end{cases}$$

拉格朗日乘数法解法步骤:

①构造函数 $F(x, y) = f(x, y) + \lambda \varphi(x, y)$ 其中 λ 为某一常数;

②求偏导数, 可由

	$\begin{cases} f_x(x, y) + \lambda \varphi_x(x, y) = 0 \\ f_y(x, y) + \lambda \varphi_y(x, y) = 0 \\ \varphi(x, y) = 0 \end{cases}$ 解出 x、y、z，其中 x、y 就是可能极值点. 拉格朗日乘数法的推广：要找函数 $u = f(x, y, z, t)$ 在条件 $\varphi(x, y, z, t) = 0$ $\psi(x, y, z, t) = 0$ 下的可能极值下的极值. 先构造函数 $F(x, y, z, t) = f(x, y, z, t) + \lambda_1 \varphi(x, y, z, t) + \lambda_2 \psi(x, y, z, t)$ 其中 λ_1、λ_2 均为参数，可由偏导数为零及条件解出 x、y、z、t，即得极值点的坐标. 例 6 将正数 12 分成三个正数 x、y、z 之和，使得 $u = x^3 y^2 z$ 为最大. 解 令 $F(x, y, z) = x^3 y^2 z + \lambda(x + y + z - 12)$，则 $\begin{cases} F'_x = 3x^2 y^2 z + \lambda = 0 \\ F'_y = 2x^3 y z + \lambda = 0 \\ F'_z = x^3 y^2 + \lambda = 0 \\ x + y + z = 12 \end{cases}$ 消元得 $2x = 3y$, $3z = x$, 得唯一驻点 $(6, 4, 2)$，故最大值为 $u_{\max} = 6^3 \times 4^2 \times 2 = 6912$. 课程思政 利用条件极值得数学意义延展得出人生启示，对学生进行人生教育. 无拘无束的生活可望不可得，有约束的生活往往人生常态，在有限制，甚至限制条件多的情况下，仍然不畏困难，做到最好.
分析评价	本案例中函数的极值概念具有局部思想，而最值概念代表整体思想. 因此生活中遇到困难是暂时的，并不意味着生活的终点，只要勇于拼搏，生活就会有新希望.
评价者	杨存典教授，商洛学院学生处

案例编号	AME041
案例标题	二重积分的概念
案例来源	购买
内容简介	用哲学中的辩证思想来认识和学习二重积分概念；体会近似与精确、量变与质变、直与曲、局部与整体、离散与连续等对立统一的辩证唯物主义观，才能更深刻认识定积分概念.
关键词	二重积分；概念；性质
编写时间	2022-3-1
编著者	余亚辉等，洛阳理工学院
素材形式	文字等
育人主题	体会近似与精确、量变与质变、直与曲、局部与整体、离散与连续等对立统一的辩证唯物主义观
素材长度	1306
案例正文	问题引入 中国蓄水量最大的淡水湖是哪个湖？答案是江西省北部的鄱阳湖，雨季时面积达 3914km^2，最大水深 29.19m，平均水深 5.1m，蓄水量 276 亿 m^3. 它上承赣、抚、信、饶、修五江之水，下通长江，它每年流入长江的水超过了黄河、淮河和海河的总流量，是长江水流的调节器. 那么它的蓄水量是如何计算出来的呢？ 1. 二重积分的概念 (1) 引例：曲顶柱体的体积 曲顶柱体：设有一空间立体 Ω，它的底是 xoy 面上的有界区域 D，它的侧面是以 D 的边界曲线为准线，而母线平行于 z 轴的柱面，它的顶是曲面 $z = f(x, y)$ [$f(x, y)$ 在 D 上连续] 且 $f(x, y) \geq 0$，这种立体称为曲顶柱体. 首先回顾前面学过的曲边梯形面积的计算方法以及中国古代数学家刘徽的割圆术。接着将问题进行转化，把求曲顶柱体的体积转化为求平顶柱体的体积，结合割圆术思想提炼出曲顶柱体的体积计算方法. 其体积 V 可以这样来计算：用任意一组曲线网将区以这些小区域 n 的边界曲线为准线，作母线平行于 z 轴的柱面，这些柱面将原来

的曲顶柱体 Ω 分划成 n 个小曲顶柱体 $\Delta\Omega_1, \Delta\Omega_2, \dots, \Delta\Omega_n$ (假设 $\Delta\sigma_i$ 所对应的小曲顶柱体为 $\Delta\Omega_i$, 这里 $\Delta\sigma_i$ 即代表第 i 个小区域, 又表示它的面积值, $\Delta\Omega_i$ 既代表第 i 个小曲顶柱体, 又代表它的体积值) 从而

$$V = \sum_{i=1}^n \Delta\Omega_i$$

$$\Delta\Omega_i \approx f(\varepsilon_i, \eta_i) [\forall (\varepsilon_i, \eta_i) \in \Delta\sigma_i]$$

$$V \approx \sum_{i=1}^n f(\varepsilon_i, \eta_i) \Delta\sigma_i$$

闭区域的直径: 是指区域上任意两点距离的最大者.

设 n 个小区域直径中的最大者为 λ , 则

$$V = \lim_{\lambda \rightarrow 0} \sum_{i=1}^n f(\varepsilon_i, \eta_i) \Delta\sigma_i$$

思政元素

求曲顶柱体体积四步骤——“分割, 近似, 求和, 取极限”的方法讨论意义. 通过解读求曲顶柱体体积的过程蕴含的方法意义, 告诉学生对待困难问题, 采取化整为零, 各个击破再击零为整, 整体解决的思想策略不失为上策.

(2) 二重积分的定义

定义 1 设 $f(x, y)$ 是有界闭区域 D 上的有界函数, 将区域 D 任意分成 n 个小闭区域: $\Delta\Omega_1, \Delta\Omega_2, \dots, \Delta\Omega_n$ ($\Delta\sigma_i$ 既表示第 i 个小闭区域, 也表示它的面积). 在每个 $\Delta\sigma_i$ 上任取一点 $f(x, y)$ 作乘积

$f(\varepsilon_i, \eta_i) \Delta\sigma_i (i=1, 2, \dots, n)$, 并作 $\sum_{i=1}^n f(\varepsilon_i, \eta_i) \Delta\sigma_i$. 如果当各小闭区域的

直径中的最大 λ 趋于零时, 这极限总存在的, 则称此极限为函数 $f(x, y)$ 在闭区域 D 上的二重积分, 记作 $\iint_D f(x, y) d\sigma$, 即

$$\iint_D f(x, y) d\sigma = \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{i=1}^n f(\xi_i, \eta_i) \Delta\sigma_i$$

其中： $f(x, y)$ 称为被积函数； $f(x, y) d\sigma$ 称为被积表达式； $d\sigma$ 称为面积元素； x 与 y 称为积分变量； D 称为积分区域；

$$\sum_{i=1}^n f(\xi_i, \eta_i) \Delta\sigma_i \text{ 称为积分和.}$$

用哲学中的辩证思想来认识和学习二重积分概念；体会近似与精确、量变与质变、直与曲、局部与整体、离散与连续等对立统一的辩证唯物主义观，才能更深刻认识定积分概念.

2. 二重积分的计算（利用直角坐标）

利用二重积分的定义来计算二重积分显然不实际的，可以采用化归的思想，将二重积分转化为两个定积分（即二次积分或累次积分）来计算.

思政元素

介绍分析解决问题的重要数学思想方法——化归

如果积分区域 D 为 X 型：

$\psi_1(x) \leq y \leq \psi_2(x), a \leq x \leq b, \psi_1(x)、\psi_2(x)$ 在区间 $[a, b]$ 上连续.

$\iint_D f(x, y) d\sigma$ 的值等于以 D 为底，以曲面 $z = f(x, y)$ 为顶的曲顶柱体的体积。利用微元法得

$$\iint_D f(x, y) d\sigma = V = \int_a^b A(x) dx = \int_a^b dx \int_{\psi_1(x)}^{\psi_2(x)} f(x, y) dy$$

如果积分区域 D 为 Y 型： $\psi_1(y) \leq x \leq \psi_2(y), c \leq y \leq d, \psi_1(y)、\psi_2(y)$ 在区间 $[c, d]$ 上连续.

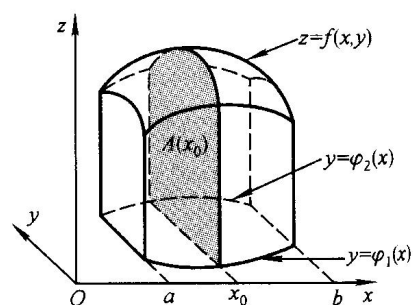
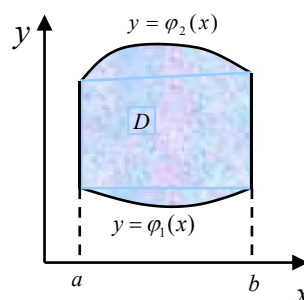
类似地可得

$$\iint_D f(x, y) d\sigma = \int_c^d dy \int_{\varphi_1(y)}^{\varphi_2(y)} f(x, y) dx$$

X 型区域的特点：穿过区域且平行于 y 轴的直线与区域边界相交不多于两个交点. Y 型区域且平行于 Y 型区域的特点：穿过区域且平行于 X 轴的直线与区域边界相交不多于两个交点. 如果积分区域

	既不是 X 型区域, 又不是 Y 型区域, 则可把 D 分成几部分, 使每个部分是 X 型区域是 Y 型区域, 每部分上的二重积分求得后, 根据二重积分对于积分区域具有可加性, 它们的和就是在 D 上的二重积分. 二重积分的计算方法: 化为累次积分的方法. 二重积分的计算步骤和注意事项: (1) 画出积分区域; (2) 确定积分次序 (积分域分块要少, 累次积好算为妙); (3) 写出积分限. 例 1 计算 $\iint_D xy d\sigma$, D 是由抛物线 $y^2 = x$ 及直线 $y = x - 2$ 所围成的区域解. 解 (法一) $D_1: 0 \leq x \leq 1, -\sqrt{x} \leq y \leq \sqrt{x},$ $D_2: 1 \leq x \leq 4, x-2 \leq y \leq \sqrt{x}$ $\begin{aligned} \iint_D xy d\sigma &= \iint_{D_1} xy d\sigma + \iint_{D_2} xy d\sigma \\ &= \int_0^1 dx \int_{-\sqrt{x}}^{\sqrt{x}} xy d\sigma + \int_1^4 dx \int_{x-2}^{\sqrt{x}} xy d\sigma = \frac{45}{8} \end{aligned}$ (法二) $D_2: -1 \leq y \leq 2, y^2 \leq x \leq y+2$ $\iint_D xy d\sigma = \int_{-1}^2 dy \int_{y^2}^{y+2} xy dx = \frac{45}{8}$ 通过二重积分的计算问题, 介绍解决问题的思想方法——化归. 培养学生的数学思维, 加深学生对数学思想的理解, 提高学生的认知水平和分析行为能力.
分析评价	本案例用哲学中的辩证思想来认识和学习二重积分概念; 体会近似与精确、量变与质变、直与曲、局部与整体、离散与连续等对立统一的辩证唯物主义观, 才能更深刻认识定积分概念.
评价者	杨存典教授, 商洛学院学生处

案例编号	AME042
案例标题	二重积分的计算
案例来源	原创
内容简介	培养学生的综合分析能力.同时要开阔眼界,化繁为简,大事化小,提升学生的解决问题的能力.这就告诉学生在人生道路上遇到问题时,根据已有知识及客观条件综合做出判断,才能使问题得到解决。
关键词	二重积分；计算；
编写时间	2021-8-1
编著者	马春洁助教，数学与计算机应用学院
素材形式	文字等
育人主题	开阔眼界，化繁为简，大事化小，提升学生的解决问题的能力。
素材长度	1756
案例正文	一、数学文化，引出课程 南北朝时期的数学家祖冲之和祖暅，沿用刘徽的思想，在求“牟合方盖”的体积时，提出了祖暅原理。祖暅原理的发现比西方类似的原理早了一千一百多年等。祖冲之是世界第一位将“圆周率”精算到小数第七位的科学家，他提出的“祖率”对数学的研究有重大贡献，比欧洲要早一千多年。这些数学史料都是我们中华民族的骄傲。 利用二重积分的几何意义来建立计算公式。假定 $f(x,y) \geq 0$，积分区域 D 为 $D=\{(x,y) a \leq x \leq b, \varphi_1(x) \leq y \leq \varphi_2(x)\}$，称为 X 型区域如图，其中 $\varphi_1(x), \varphi_2(x)$ 在区间 $[a,b]$ 上连续。 现在利用平行于 $yo z$ 平面的平面 $x = x_0 (x_0 \in [a,b])$ 去截曲顶柱体，其截面是一个以 $[\varphi_1(x_0), \varphi_2(x_0)]$ 为底，曲线 $z = f(x_0, y)$ 为曲边的曲边梯形。由定积分的几何意义可知，截面面积为 $A(x_0) = \int_{\varphi_1(x_0)}^{\varphi_2(x_0)} f(x_0, y) dy$ 根据平行截面面积为已知的立体体积的方法，得曲顶柱体体积为



$$V = \int_a^b A(x)dx = \int_a^b \left[\int_{\varphi_1(x)}^{\varphi_2(x)} f(x, y)dy \right] dx$$

从而有等式

$$\iint_D f(x, y) d\sigma = \int_a^b \left[\int_{\varphi_1(x)}^{\varphi_2(x)} f(x, y) dy \right] dx$$

上式右端的两个定积分:先对 y , 后对 x 积分, 称之为累次积分, 这个累次积分可记作 $\int_a^b dx \int_{\varphi_1(x)}^{\varphi_2(x)} f(x, y) dy$ 即

$$\iint_D f(x, y) d\sigma = \int_a^b dx \int_{\varphi_1(x)}^{\varphi_2(x)} f(x, y) dy$$

思政目标

竞争意识

思政元素

1. 微积分的发展历史曲折跌宕, 撼人心灵, 可以培养学生正确世界观、科学方法论和对学生进行文化熏陶。

2. 体现了对立和统一、量变到质变的逻辑思维。我国古代儒家思想中的“外圆内方”的处世哲学, 就是“曲直”思维的最好诠释。在学生的人格塑造中, 应融入“曲”和“直”两个概念, 帮助他们深刻领会微积分曲直的辩证关系, 引导他们“方做人, 圆处事”, 既锤炼光明正大、明辨是非的高尚品格, 又运用机智圆通、灵活老练的精妙技巧, 进一步有效地解决生活实践中遇到的人际关系问题、工作环境问题、社会竞争问题等。

二、类比分析, 引出相关计算方法

类似地, 如果积分区域 D 可以表示为

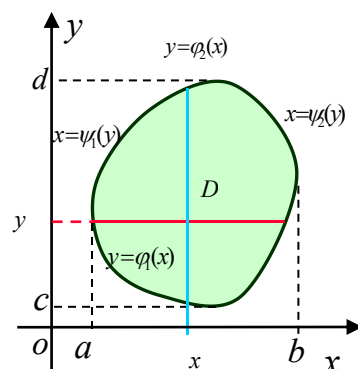
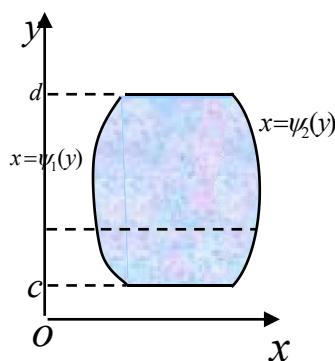
$$D = \{(x, y) | c \leq y \leq d,$$

$$\psi_1(y) \leq x \leq \psi_2(y)\}$$

称为 Y -型区域 (如图), 其中函数 $\psi_1(y), \psi_2(y)$ 在区间 $[c, d]$ 上连续, 那么就有

$$\iint_D f(x, y) d\sigma = \int_c^d \left[\int_{\psi_1(y)}^{\psi_2(y)} f(x, y) dx \right] dy$$

这就是先对 x , 后对 y 积分的累次积分。



注：(1) 有的情况下积分区域既是 X -型区域又是 Y -型区域 (如右图), 不妨设为

$$D = \{(x, y) | a \leq x \leq b, \varphi_1(x) \leq y \leq \varphi_2(x)\}$$

$$= \{(x, y) | c \leq y \leq d, \psi_1(y) \leq x \leq \psi_2(y)\}$$

$$\begin{aligned} \iint_D f(x, y) dx dy &= \int_a^b dx \int_{\varphi_1(x)}^{\varphi_2(x)} f(x, y) dy \\ &= \int_c^d dy \int_{\psi_1(y)}^{\psi_2(y)} f(x, y) dx. \end{aligned}$$

为计算方便, 可以选择积分次序, 在必要时也可交换积分次序。

(2) 若积分区域较复杂, 可将其分成若干个互不相交的 X -型区域或 Y -型区域. 如右图中: $D = D_1 + D_2 + D_3$, 则有 $\iint_D = \iint_{D_1} + \iint_{D_2} + \iint_{D_3}$ 。

(3) 利用被积函数的奇偶性及积分区域 D 的对称性, 常会大大化简二重积分的计算。

设函数 $f(x, y)$ 在闭区域 D 上连续, 且 D 关于 x 轴对称, 位于 x 轴上方的部分记为 D_1 , 则在 D 上

$$\text{若 } f(x, -y) = f(x, y), \text{ 则 } \iint_D f(x, y) dx dy = 2 \iint_{D_1} f(x, y) dx dy;$$

$$\text{若 } f(x, -y) = -f(x, y), \text{ 则 } \iint_D f(x, y) dx dy = 0.$$

当区域关于 y 轴对称, 函数关于变量 x 有奇偶性时有类似的结果。

在利用这种方法时, 要同时兼顾到被积函数 $f(x, y)$ 的奇偶性和积分区域 D 的对称性两方面。

思政目标

坚持品质、爱国精神、探索精神

思政元素

1. 典型的数学史料与当今的中国成就激发学生强烈的爱国热情和民族自尊心, 培养学生的创新意识, 引导学生树立远大的理想信念, 激励学生积极进取, 勇于奋斗。

2. 培养学生的综合分析能力. 同时要开阔眼界, 化繁为简, 大事化小, 提升学生的解决问题的能力. 这就告诉学生在人生道路上遇到问题时, 根据已有知识及客观条件综合做出判断, 才能使问题得到解决。

三、巩固练习, 拓展应用

例 1 计算 $\iint_D xy d\sigma$, 其中 D 是由直线 $y=1, x=2$ 及 $y=x$ 所围成

的闭区域;

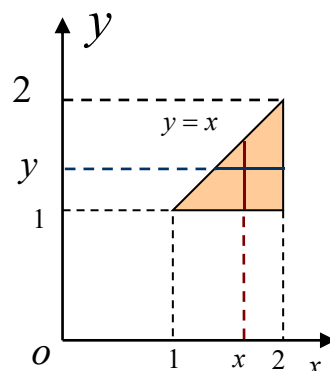
解: 解法 1. 将 D 看作 X -型区域, 则 $D: \begin{cases} 1 \leq y \leq x \\ 1 \leq x \leq 2 \end{cases}$.

$$I = \int_1^2 dx \int_1^x xy dy = \int_1^2 \left[\frac{1}{2} xy^2 \right]_1^x dx \\ = \int_1^2 \left[\frac{1}{2} x^3 - \frac{1}{2} x \right] dx = \frac{9}{8}.$$

解法 2. 将 D 看作 Y -型区域,

则 $D: \begin{cases} y \leq x \leq 2 \\ 1 \leq y \leq 2 \end{cases}$. 于是,

$$I = \int_1^2 dy \int_y^2 xy dx = \int_1^2 \left[\frac{1}{2} x^2 y \right]_y^2 dy = \int_1^2 \left[2y - \frac{1}{2} y^3 \right] dy = \frac{9}{8}.$$



例 2 计算二重积分 $\iint_D x^2 e^{-y^2} dx dy$, 其中 D 是直线 $x=2$ 、 $y=x$

及双曲线 $xy=1$ 所围成的区域.

解: 首先画出 D 的图形 (如图 7.10). 由图可知 D 是 X -型区域, 即:

$$D = \{(x, y) \mid \frac{1}{x} \leq y \leq x, 1 \leq x \leq 2\}$$

$$\text{所以 } I = \iint_D \frac{x^2}{y^2} dx dy = \int_1^2 \left[\int_{\frac{1}{x}}^x \frac{x^2}{y^2} dy \right] dx = \int_1^2 \left[-\frac{x^2}{y} \right]_{\frac{1}{x}}^x dx = \int_1^2 (x^3 - x) dx = \frac{9}{4}$$

如果利用 Y -型区域, 就必须将 D 分成两部分, 比较麻烦.

牟合方盖是由我国古代数学家刘徽首先发现并采用的一种用于计算球体体积的方法. 求内切球的体积转化为求牟合方盖的体积. 刘徽: 观立方之内, 合盖之外, 虽衰杀有渐, 而多少不掩判合总结, 方圆相缠, 浓纤诡互, 不可等正. 欲陋形措意, 惧失正理敢不阙疑, 以俟能言者. 刘徽提出, “牟合方盖”的体积跟内接球体体积的比为 $4: \pi$, 只要有方法找出“牟合方盖”的体积便可. 直至二百多年后, 祖冲之和他的儿子祖暅承袭了刘徽的想法, 利用“牟合方盖”彻底地解决了球体体积公式的问题. 他们的方法是将原来的“牟合方盖”平均分为八份, 取它的八分之一来研究在计算二重积分的过程中交换积分次序. 以及利用对称性奇偶性化简二次积分目的都是使题目由难变易. 复杂的二重积分题目, 通过寻找题目的核心要素, 采用适当的求解方法就可以实现由难变易的转化.

例 3 2020 年 3 月 9 日, 我国第 54 颗北斗导航卫星成功发射, 在太空中刷新了“中国速度”. 重积分的几何应用—曲面表面积的

	计算时，可以适时地引入“北斗精神”。我国的北斗工作者秉承“自主创新、开放融合、万众一心、追求卓越”的北斗精神为国家托起国之重器。这颗静止轨道卫星是一颗地球同步卫星，教师很自然地提出案例：一颗地球同步通信卫星究竟可以覆盖地球多大的面积？ 思政目标 坚持品质、爱国精神、探索精神 思政元素 1. 同学们在成长过程中，要以有限积蓄无限，以量变积蓄质变，以“十年磨一剑”的坚忍不拔的精神和“不积跬步，无以至千里”的决心，在一点一滴的积累中提高自身综合素质，锤炼奋斗精神，实现人生价值。 2. 典型的数学史料与当今的中国成就激发学生强烈的爱国热情和民族自尊心，培养学生的创新意识，引导学生树立远大的理想信念，激励学生积极进取，勇于奋斗。
分析评价	本案例以典型的数学史料与当今的中国成就激发学生强烈的爱国热情和民族自尊心，培养学生的创新意识，引导学生树立远大的理想信念，激励学生积极进取，勇于奋斗。
评价者	杨存典教授，商洛学院学生处

案例编号	AME043
案例标题	曲面的面积
案例来源	购买
内容简介	利用我国标志性的建筑引入课程教学内容，巧妙传达数学思想——曲面面积的同时，渗透美学教育.
关键词	空间曲面；面积
编写时间	2022-3-1
编著者	余亚辉等，洛阳理工学院
素材形式	文字等
育人主题	美学教育
素材长度	956
	曲面的面积 日常生活中曲面几乎无处不在，上面左图为我国著名建筑——国家大剧院，其外表面为一蛋壳形状的曲面，由于其完美对称，给人带来视觉上极强的舒适感，具有庄重和谐的美感. 在建筑设计时，我们往往需要计算曲面的面积，如何计算国家大剧院外表曲面的面积呢？应该采取什么样的思路解决这个问题呢？如果仔细观察上面右图，也许会找到答案，右图为大剧院施工过程图，当我们把镜头拉近，不难看到，我们所看到的曲面实际上是由若干平面拼接而成. 这提示我们，在小的范围内，我们可以用平面近似曲面，下面看一般化的讨论过程. 思政元素 利用我国标志性的建筑引入课程教学内容，巧妙传达数学思想的同时，渗透美学教育. 设曲面 S 由方程 $z = f(x, y)$ 给出，D_{xy} 为曲面 S 在 xoy 面上的投影区域，函数 $f(x, y)$，在 D 上具有连续偏导数 $f_x(x, y)$ 和 $f_y(x, y)$ 现计算曲面的面积 A. 在闭区域 D_{xy} 上任取一直径很小的闭区域 $d\sigma$ (它的面积也记作 $d\sigma$)，在 $d\sigma$ 内取一点 $p(x, y)$，对应着曲面 S 上一 $M[x, y, f(x, y)]$，曲面 S 在点 M 处的切平面设为 T. 以小区域 $d\sigma$ 的边界为准线作母

	线平行于 z 轴的柱面, 该柱面在曲面 S 上截下一小片曲面, 在切平面 T 上截下一小片平面, 由于 $d\sigma$ 的直径很小, 那一小片平面面积近似地等于那一小片曲面面积. 曲面 S 在点 M 处的法线向量(指向朝上的那个)为 $\vec{n} = \{-f_x(x, y), -f_y(x, y), 1\}$, 它与 z 轴正向所成夹角 γ 的方向余弦为 $\cos \gamma = \frac{1}{\sqrt{1 + f_x^2(x, y) + f_y^2(x, y)}},$ $dA = \frac{d\sigma}{\cos \gamma}$ $dA = \sqrt{1 + f_x^2(x, y) + f_y^2(x, y)} d\sigma$ 这就是曲面 S 的面积元素, 故 $A = \iint_{D_{xy}} \sqrt{1 + f_x^2(x, y) + f_y^2(x, y)} d\sigma.$ 思政元素: 利用我国标志性的建筑引入课程教学内容, 巧妙传达数学思想的同时渗透美学教育. 培养学生理论练习实际的能力, 提升审美素养, 激发创新创造能力.
分析评价	本案例利用我国标志性的建筑引入课程教学内容, 巧妙传达数学思想的同时渗透美学教育. 培养学生理论练习实际的能力, 提升审美素养, 激发创新创造能力.
评价者	杨存典教授, 商洛学院学生处

案例编号	AME044
案例标题	对弧长的曲线积分
案例来源	购买
内容简介	本节通过引入不积跬步，无以至千里；不积小流，无以成江海的中国思想来说明基于弧长的曲线积分定义，再通过求解金属线的质量的物理问题定义了曲线积分的概念.
关 键 词	对弧长的曲线积分
编写时间	2021-5-18
编 著 者	马春洁助教，数学与计算机应用学院
素材形式	文字等
育人主题	培养学生透过现象洞察本质，求真创新的科学态度.
素材长度	1156
案例正文	一. 中国精神，引出课程 1. 不积跬步，无以至千里；不积小流，无以成江海. ——荀子《劝学》。 2. 有限积蓄无限，以量变积蓄质变，对弧长的曲线积分的定义体现了对立和统一、量变到质变的逻辑思维同学们在成长过程中，要以有限积蓄无限，以量变积蓄质变，以“十年磨一剑”的坚忍不拔的精神和“不积步无以至千里”的决心，在一点一滴的积累中提高自身综合素质，锤炼奋斗精神，实现人生价值。 1.结合生活实例，基于量变与质变的辩证关系，培养学生人文素养和辩证思维的同时，进一步培养他们脚踏实地的精神。 2.体会积分思想，除了数学解释外还折射出人生哲理，我们一生每个人有很多梦想以及我们的中国梦. 梦想的实现需要我们将梦想分成若干小的具体的目标，通过脚踏实地完成一个一个小的目标，在奋斗的路上，我们一直努力着，不断追求，总有一天我们的梦想及中国梦都会实现人文素养与中国精神。 思政元素 结合生活实例，基于 量变与质变的辩证关系，培 养学生人文素养和辩证思 维的同时，进一步培养他们脚踏实地的精神. 体会积分思想，除了数学解释外还折射出人生哲理，我们一生每个人有很多梦想以及我们的中国梦. 梦想的实现需要我们将梦想分成若干小的具体的目 标，通过脚踏实地完成一个一个小的目标，在奋斗的路上，我们一直努力着，不断追求，总有一天我们的梦想及中国梦都会实现. 二. 带着问题，给出概念 通过求得金属曲线的质量来引入曲线积分的概念，设有一有限长的金属曲线 C，其上不均匀地分布着质量，因此金属曲线 C 的线密度是变量。设其在 xOy 面内的一段曲线弧 L，它的端点是 A, B, 在 L 上

任一点 (x, y) 处, 它的线密度为 $\rho(x, y)$, 现在要计算这金属曲线 C 的质量 M .

曲线 C 的质量 M .

把曲线分成 n 小段, $\Delta s_1, \Delta s_2, \dots, \Delta s_n$ (Δs_i 也表示弧长); 任取 $(\xi_i, \eta_i) \in \Delta s_i$, 得第 i 小段质量的近似值 $\rho(\xi_i, \eta_i) \Delta s_i$, 于是整个物质曲线的

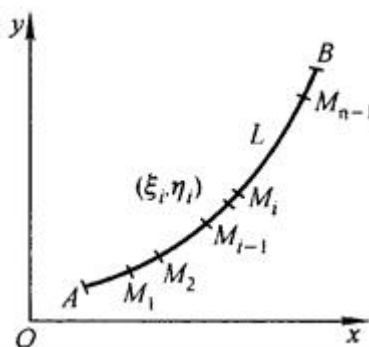
质量近似为 $M \approx \sum_{i=1}^n \rho(\xi_i, \eta_i) \Delta s_i$;

令 $\lambda = \max \{\Delta s_1, \Delta s_2, \dots, \Delta s_n\} \rightarrow 0$, 则整个物质曲线的质量为

$$M = \lim_{\lambda \rightarrow 0} \sum_{i=1}^n \rho(\xi_i, \eta_i) \Delta s_i$$

令 $\lambda = \max \{\Delta s_1, \Delta s_2, \dots, \Delta s_n\} \rightarrow 0$, 则整个物质曲线的质量为

$$M = \lim_{\lambda \rightarrow 0} \sum_{i=1}^n \rho(\xi_i, \eta_i) \Delta s_i.$$



从而可以给出曲线积分的定义: 设 L 为 xOy 面内的一条光滑曲线弧, 函数 $f(x, y)$ 在 L 上有界. 在 L 上任意插入一点列 $A_1, A_2, \dots, A_{n-1}$ 把 L 分在 n 个小段. 设第 i 个小段的长度为 Δs_i , 又 (ξ_i, η_i) 为第 i 个小段上任意取定的一点, 作乘积 $f(\xi_i, \eta_i) \Delta s_i$, ($i=1, 2, \dots, n$), 并

作和 $\sum_{i=1}^n f(\xi_i, \eta_i) \Delta s_i$, 如果当各小弧段的长度的最大值 $\lambda \rightarrow 0$,

这和式的极限总存在, 则称此极限为函数 $f(x, y)$ 在曲线弧 L 上

对弧长的曲线积分或第一类曲线积分, 记作 $\int_L f(x, y) ds$, 即

$$\int_L f(x, y) ds = \lim_{\lambda \rightarrow 0} \sum_{i=1}^n f(\xi_i, \eta_i) \Delta s_i.$$

其中 $f(x, y)$ 叫做被积函数, L 叫做积分弧段.

	思政元素 曲线积分的思想 三. 深化概念, 探讨积分性质 曲线积分的存在性: 当 $f(x,y)$ 在光滑曲线弧 L 上连续时, 对弧长的曲线积分 $\int_L f(x,y)ds$ 是存在的. 以后我们总假定 $f(x,y)$ 在 L 上是连续的. 根据对弧长的曲线积分的定义, 曲线 C 的质量就是曲线积分 $\int_L \rho(x,y)ds$ 的值, 其中 $\rho(x,y)$ 为线密度. 对弧长的曲线积分的推广到积分弧段为空间曲线的情况: $\int_{\Gamma} f(x,y,z)ds = \lim_{\lambda \rightarrow 0} \sum_{i=1}^n f(\xi_i, \eta_i, \zeta_i) \Delta s_i.$ 如果 L (或 Γ) 是分段光滑的, 则规定函数在 L (或 Γ) 上的曲线积分等于函数在光滑的各段上的曲线积分的和. 例如设 L 可分成两段光滑曲线弧 L_1 及 L_2, 则规定 $\int_{L_1+L_2} f(x,y)ds = \int_{L_1} f(x,y)ds + \int_{L_2} f(x,y)ds.$ 闭曲线积分: 如果 L 是闭曲线, 那么函数 $f(x,y)$ 在闭曲线 L 上对弧长的曲线积分记作 $\oint_L f(x,y)ds$. 对弧长的曲线积分的性质: 性质 1 设 c_1, c_2 为常数, 则 $\int_L [c_1 f(x,y) + c_2 g(x,y)]ds = c_1 \int_L f(x,y)ds + c_2 \int_L g(x,y)ds;$ 性质 2 若积分弧段 L 可分成两段光滑曲线弧 L_1 和 L_2, 则 $\int_L f(x,y)ds = \int_{L_1} f(x,y)ds + \int_{L_2} f(x,y)ds;$ 性质 3 设在 L 上 $f(x,y) \leq g(x,y)$, 则 $\int_L f(x,y)ds \leq \int_L g(x,y)ds$. 特别地, 有 $\int_L f(x,y)ds \leq \int_L f(x,y) ds$
分析评价	本案例通过引入不积跬步, 无以至千里; 不积小流, 无以成江海的中国思想来说明基于弧长的曲线积分定义, 再通过求解金属线的质量的物理问题定义了曲线积分的概念, 教育学生从实际问题中获取数学概念。再通过学习积分的性质和深化练习让学生进一步明白曲线积分的应用, 并养成独立解决问题的习惯。
评价者	杨存典教授, 商洛学院学生处

案例编号	AME045
案例标题	曲线积分
案例来源	购买
内容简介	曲线积分包括 对弧长的曲线积分和对坐标的曲线积分。通过伽利略发现摆线具有等时性的过程,培养学生透过现象洞察本质,求真创新的科学态度.分析对弧长的曲线积分的实例,利用积分思想让学生明白想要把个人梦汇成中国梦、个人力量凝聚成中国力量.培养学生自觉把小我融入大我的家国情怀,在潜移默化中坚定学生的理想信念.
关键词	对弧长的曲线积分; 对坐标的曲线积分
编写时间	2022-3-1
编著者	余亚辉等, 洛阳理工学院
素材形式	文字等
育人主题	培养学生透过现象洞察本质, 求真创新的科学态度.
素材长度	1256
	问题引入 摆线的等时性问题: 人类历史上,一直探索测量时间的方法.古时候人们用沙漏、日晷等装置计算时间,直到 17 世纪依然如此. 1582 年的一天,伟大的物理学家伽利略无意中观察到了教堂中的大吊灯来回摆动,脑海里突然闪出测量吊灯摆动时间的念头,起初,吊灯在一个大圆弧上摆动,摆动速度较大,伽利略测算来回摆动一次的时间,过了一阵子,吊灯摆动的幅度变小了,摆动速度也变慢了,此时,他又测量了来回摆动一次的时间,让他大为吃惊的是,两次测量的时间是相同的.伽利略最终发现:吊灯来回摆动一次需要的时间与摆动幅度的大小无关,无论摆幅大小如何,来回摆动一次所需时间是相同的.这就是伽利略发现吊灯的摆动(摆线)具有等时性. 单摆等时性的发现,为人类精准计时开创了新道路,但伽利略并没有把钟表制造出来,直到 1656 年,荷兰物理学家惠更斯制造出人类历史上第一个摆钟,使伽利略制造钟表的设想变为现实.

伽利略发现的单摆等时性是通过试验发现，能否利用微积分知识进行理论证明其正确性呢？

思政元素：伽利略发现摆线具有等时性的过程. 培养学生透过现象洞察本质，求真创新的科学态度.

1.对弧长的曲线积分

(1) 引例

设一构件(物体)占 xoy 面内一段曲线弧 L ，端点为 A 、 B ，线密度 $\rho(x,y)$ 连续，求构件质量 M

(1) 将 L 分割 $\Delta s_i (i=1,2,\dots,n)$

(2) $\forall (x_i, y_i) \in \Delta s_i, \Delta M_i \approx \rho(x_i, y_i) \cdot \Delta s_i$

(3) $M \approx \sum_{i=1}^n \rho(x_i, y_i) \cdot \Delta s_i$

(4) $M = \lim_{\lambda \rightarrow 0} \sum_{i=1}^n \rho(x_i, y_i) \cdot \Delta s_i$

其中 $\lambda = \max\{\Delta s_1, \Delta s_2, \dots, \Delta s_n\}$

(2) 对弧长曲线积分的定义

定义 1 L 为 xoy 面内的一条光滑曲线弧， $f(x,y)$ 在 L 上有界，用 M ；将 L 分成 n 小段 Δs_i ，任取一点 $(\varepsilon_i, \eta_i) \in \Delta s_i (i=1, \dots, n)$ 作和

$\sum_{i=1}^n f(\varepsilon_i, \eta_i) \Delta s_i$ ，令 $\lambda = \max\{\Delta s_1, \dots, \Delta s_n\}$ ，若当 $\lambda \rightarrow 0$ 时 $\lim_{\lambda \rightarrow 0} \sum_{i=1}^n f(\varepsilon_i, \eta_i) \Delta s_i$

存在，则称此极限值为 $f(x,y)$ 在 L 上对弧长的曲线积分(第一类曲线积分)，记为 $\int_L f(x,y) ds$ ，即

$$\int_L f(x,y) ds = \lim_{\lambda \rightarrow 0} \sum_{i=1}^n f(\varepsilon_i, \eta_i) \Delta s_i$$

思政元素

无论一元函数定积分、多元函数重积分，还是曲线积分，其本质都是相似的，都可以看作是无数个微元的累积过程. 如同习总书记提出的中国梦是由每个人的个人梦想组成，汇集我们每个人的正能

量就能汇聚成中国力量.

(3) 对弧长曲线积分的计算

定理 1 设 $f(x, y)$ 在弧 L 上有定义且连续, L 方程

$$\begin{cases} x=\Phi(t) \\ y=\psi(t) \end{cases} (\alpha \leq t \leq \beta), \Phi(t), \psi(t) \text{ 在 } [\alpha, \beta]$$

上具有一节连续函数, 且

$\Phi'^2(t) + \psi'^2(t) \neq 0$, 则曲线积分

$$\int_L f(x, y) ds \text{ 存在, 且 } \int_L f(x, y) ds = \int_{\alpha}^{\beta} f[\Phi(t), \psi(t)] \sqrt{\Phi'^2(t) + \psi'^2(t)} dt$$

将对弧长的曲线积分转化为一元函数定积分, 计算口诀: 一代
人, 二换元, 三定限.

思政元素:

分析对弧长的曲线积分的实例, 利用积分思想让学生明白想要
把个人梦汇成中国梦、个人力量凝聚成中国力量. 培养学生自觉把小
我融入大我的家国情怀, 在潜移默化中坚定学生的理想信念.

2. 对坐标的曲线积分

有向曲线: 规定了方向的曲线, 或有起点和终点的曲线; 简单闭
曲线 L 的方向: 逆时针为正.

(1) 引例 变力沿曲线所做的功.

设一质点在 xoy 面内从点 A 沿光滑曲线弧 L 移到点 B , 受力
 $\vec{F}(x, y) = P(x, y)\vec{i} + Q(x, y)\vec{j}$, 其中 P, Q 在 L 上连续. 求上述过程
所做的功.

解 ①分割: 先将 L 分成 n 个小弧段 $\overline{M_{i-1}M_i} (i=1, 2, \dots, n)$

②近似代替: $\Delta\omega_i \approx \vec{F}(\varepsilon_i, \eta_i) \cdot \overrightarrow{M_{i-1}M_i}$

③求和: $\omega \approx \sum_{i=1}^n [P(\varepsilon_i, \eta_i)\Delta x_i + Q(\varepsilon_i, \eta_i)\Delta y_i]$

令 $\lambda = \max\{\overline{M_{i-1}M_i} \text{ 的长度} | i=1, 2, \dots, n\}$
④取极限: $\omega = \lim_{\lambda \rightarrow 0} \sum_{i=1}^n [P(\varepsilon_i, \eta_i)\Delta x_i + Q(\varepsilon_i, \eta_i)\Delta y_i]$ (2) 对

(2) 坐标曲线积分的定义

定义 2 设 L 为 xoy 面内从点 A 到点 B 的一条有向光滑曲线弧, 函数 $P(x, y)$ 、 $Q(x, y)$ 在 L 上有界. 在 L 上沿 L 的方向任意插入一点列 $M_{i-1}(x_{i-1}, y_{i-1}) (i=1, 2, \dots, n)$ 把 L 分成 n 个有向小弧段

$$\overline{M_{i-1}M_i} (i=1, 2, \dots, n; M_0 = A, M_n = B)$$

设 $\Delta x_i = x_i - x_{i-1}$, $\Delta y_i = y_i - y_{i-1}$ 点 (ε_i, η_i) 为 $\overline{M_{i-1}M_i}$ 上任意取定的点. 如果当每个小弧段长度的最大值 $\lambda \rightarrow 0$ 时, $P(\varepsilon_i, \eta_i) \Delta x_i$ 的极限总存在, 则称此极限为函数 $P(x, y)$ 在有向曲线弧 L 上对坐标 x 的曲线积分, 记作 $\int_L P(x, y) dx$ 类似地, 如果 $\sum_{i=1}^n Q(\varepsilon_i, \eta_i) \Delta y_i$ 的极限值总存在, 则称此极限为函数 $Q(x, y)$ 在有向曲线弧 L 上对坐标 y 的曲线积分, 记作 $\int_L Q(x, y) dy$. 即

$$\int_L P(x, y) dx = \lim_{\lambda \rightarrow 0} \sum_{i=1}^n P(\varepsilon_i, \eta_i) \Delta x_i$$

$$\int_L Q(x, y) dy = \lim_{\lambda \rightarrow 0} \sum_{i=1}^n Q(\varepsilon_i, \eta_i) \Delta y_i$$

(3) 对坐标曲线积分的计算

定理 2 设 $P(x, y)$, $Q(x, y)$ 在 L 上连续, L 的参数方程为:

$$\begin{cases} x = \phi(t) \\ y = \psi(t) \end{cases}$$

当 t 单调地从 α 变到 β 时, 点 $M(x, y)$ 从 L 的起点 A 沿 L 变到终点 B , 且 $\phi(t)$, $\psi(t)$ 在以 α , β 为端点的闭区间上具有一阶连续导数, 且 $\phi^2(t) + \psi^2(t) \neq 0$, 则 $\int_L P(x, y) dx + Q(x, y) dy$ 存在, 且

$$\int_L P(x, y) dx + Q(x, y) dy = \int_{\alpha}^{\beta} \{P[\phi(t), \psi(t)]\phi'(t) + Q[\phi(t), \psi(t)]\psi'(t)\} dt$$

定义 3 若积分 $\int_L Pdx + Qdy$ 仅与 L 的起点与终点有关, 称积分 $\int_L Pdx + Qdy$ 与路径无关.

(4) 两类曲线积分的关系

复习 曲线 $L: \begin{cases} x=\phi(t) \\ y=\psi(t) \end{cases}$ 上一点处切向量 $\vec{T} = \{\phi'(t), \psi'(t)\}$

设有向曲线弧 L 的起点 A 、终点 B , 取弧长 $\overline{AM} = s$ 为曲线弧 L 的参数, $\overline{AB} = l$, 则 $\begin{cases} x=x(s) \\ y=y(s) \end{cases}, 0 \leq s \leq l$ 若 $x(s)$ 、 $y(s)$ 在 $[0, l]$ 上具有一阶连续导数, P 、 Q 在 L 上连续, 则

$$\begin{aligned} \int_L Pdx + Qdy &= \int_0^l \left\{ P[x(s), y(s)] \frac{dx}{ds} + Q[x(s), y(s)] \frac{dy}{ds} \right\} ds \\ &= \int_0^l \{ P[x(s), y(s)] \cos \alpha + Q[x(s), y(s)] \cos \beta \} ds \end{aligned}$$

其中 $\cos \alpha = \frac{dx}{ds}, \cos \beta = \frac{dy}{ds}$ 是 L 的切线向量的方向余弦, 且切线向量与 L 的方向一致, 又

$$\begin{aligned} \int_L (P \cos \alpha + Q \cos \beta) ds &= \int_0^l \{ P[x(s), y(s)] \cos \alpha + Q[x(s), y(s)] \cos \beta \} ds \\ \therefore \int_L Pdx + Qdy &= \int_L (P \cos \alpha + Q \cos \beta) ds \end{aligned}$$

3 格林公式

(1) 区域 D 的分类

单连通区域(无洞) 设 D 为平面区域, 若 D 内任一闭曲线所围的部分都属于 D , 称 D 为单连通区域, 否则称为复连通区域(有洞).

区域 D 的边界曲线 L 的方向, 当观看者沿 L 行走时, D 内在他近处的那一部分总在他的左边.

(2) 格林公式

定理 3 设闭区域 D 由分段光滑的曲线 L 围成, 函数 $P(x, y)$ 和 $Q(x, y)$ 在 D 上具有一阶连续偏导数, 则有

$$\iint_D \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} \right) dxdy = \oint_L Pdx + Qdy. \quad L \text{ 为 } D \text{ 的取正向的边界曲线.}$$

思政元素

	英国数学家乔治·格林简介：乔治·格林(<i>George Green</i>, 1793-1841)的学生生涯只有短短的两个学期. 他的小学校长 <i>Robert Goodacre</i>, 对格林的影响深刻. 这位校长写过许多关于数学以及教育方面的教科书, 他通过演讲成功地激发并培养了幼小乔治·格林(1793-1841)的格林在数学和自然科学方面的兴趣 并使之发扬光大, 直到不可思议地在科学上做出巨大的贡献. 因为要给父亲的面包坊照料生意, 格林早早辍学, 但格林没有间断自学. 他自学了包括拉普拉斯(<i>Laplace</i>)的《天体力学》等著作以及拉格朗日(<i>Lagrange</i>)的关于数学物理方面的著作的英文版本. 1828 年格林出版了他的最重要的科学著作《关于数学分析应用于电磁理论的一篇论文》. 1829 年, 父亲去世后, 格林进入剑桥 <i>Gonville and Caius</i> 学院学习, 格林在此期间发表了对后世有重要影响的学术成果. 美国数学史家莫里斯·克莱因评价说: “格林是第一个沿着欧洲大陆上的工作线索前进的英国大数学家, 他的工作培养了人数众多的数学物理学者——剑桥学派, 其中包括威廉·汤姆孙爵士、斯托克斯爵士、瑞利勋爵和克拉克·麦克斯韦.” 这一评价不仅说明了格林对剑桥学派以至整个英国科学界的影响, 也指出了格林研究工作的渊源, 那就是法国、德国等数学物理学家们开创的位势理论. 思政元素: 介绍数学家格林在数学史伟大的贡献和自学成才的传奇人生, 让学生学会自己思考, 并树立独立解决问题的信心. 让学生学习数学家格林自强不息的精神品格, 培养学生热爱科学和对科学产生兴趣, 让学生学会自学、学会自己思考, 并树立独立解决问题的信心.
分析评价	本案例伽利略发现摆线具有等时性的过程, 培养学生透过现象洞察本质, 求真创新的科学态度. 分析对弧长的曲线积分的实例, 利用积分思想让学生明白想要把个人梦汇成中国梦、个人力量凝聚成中国力量. 培养学生自觉把小我融入大我的家国情怀, 在潜移默化中坚定学生的理想信念.
评价者	杨存典教授, 商洛学院学生处

案例编号	AME046
案例标题	曲面积分
案例来源	购买
内容简介	由应用问题出发,创设情境,激发学生对曲线积分和曲面积分的兴趣,培养学生求真创新的科学态度。
关键词	对坐标的曲面积分
编写时间	2022-3-1
编著者	余亚辉等,洛阳理工学院
素材形式	文字等
育人主题	培养学生透过现象洞察本质,求真创新的科学态度。
素材长度	1586
	1. 对坐标的曲面积分 (1) 有向曲面 曲面的分类:单侧曲面和双侧曲面(即有向曲面) 定义 5 设曲面 $z = z(x, y)$, 若取法向量朝上($\vec{n}$ 与轴正向的夹角 γ 为锐角), 则曲面取定上侧, 否则为下侧; 对曲面 $x = x(y, z)$, 若 $\vec{n}$ 的方向与 x 正向夹角 α 为锐角, 曲面取定前侧, 否则为后侧; 对曲面 $y = y(x, z)$, $\vec{n}$ 的方向与 y 正向夹角 β 为锐角曲面取定右侧, 否则为左侧; 若曲面为闭曲面, 则取法向量的指向朝外, 则此时取定曲面的外侧, 否则为内侧; 取定了法向量即选定了曲面的侧, 这种曲面称为有向曲面. 拓展问题: 有没有只有一个侧的曲面? 单侧曲面—莫比乌斯带:1858 年,德国数学家莫比乌斯把一根纸条扭转 180° 后, 两头再黏结起来做成的纸带圈. 普通纸带具有两个面(即双侧曲面), 一个正面, 一个反面, 两个面可以涂成不同的颜色; 而这样的纸带只有一个面(即单侧曲面), 一只小虫可以爬遍整个曲面而不必跨过它的边缘. 这种纸带被称为“莫比乌斯带”. 思政元素 德国数学家莫比乌斯(Mobius, 1790-1868)简介:莫比乌斯最初学法学, 1809 年转向数学, 从 1809 年到 1814 年他在莱比锡大学学数学并获博士学位. 1814 年在莱比锡任天文学教师 1815 年他获得

教授资格，一年后在高斯的推荐下成为特级教授和莱比锡天文台的观测员。1846 年他成为王家萨克森科学院建立成员之一 1848 年他成为莱比锡天文台台长 1868 年 9 月 26 日逝世于莱比锡。

定理 6 设空间闭区域 Ω 是由分片光滑的闭曲面 Σ 所围成的，函数 $P(x, y, z)$ 、 $Q(x, y, z)$ 、 $R(x, y, z)$ 在 Ω 上具有一阶连续偏导数，则

$$\iiint_{\Omega} \left(\frac{\partial P}{\partial x} + \frac{\partial Q}{\partial y} + \frac{\partial R}{\partial z} \right) dv = \iint_{\Sigma} P dx dz + Q dz dx + R dx dy \quad \text{其中 } \Sigma \text{ 是 } \Omega$$

$$= \iint_{\Sigma} (P \cos \alpha + Q \cos \beta + R \cos \gamma) ds$$

的整个边界曲面的外侧， $\cos \alpha$ 、 $\cos \beta$ 、 $\cos \gamma$ 是 Σ 上点 (x, y, z) 处的法向量的方向余弦，称之为高斯公式。

思政元素

数学家高斯简介:约翰·卡尔·弗里德里希·高斯(Johann Carl Friedrich Gauss, 1777-1855)，德国著名数学家、物理学家、天文学家、大地测量学家，近代数学奠基者之一，高斯是数学史上最重要的数学家之一，有“数学王子”之称，高斯从小就展现了数学天赋，三岁时便能指出他父亲账目上的错误，在他的人生中经历很多坎坷：长期资助他研究工作的卡尔·威廉·斐迪南公爵在抵抗拿破仑的耶拿战役阵亡，给他带来了经济上的拮据；妻子的逝世，也曾使得他一度心灰意冷，但是他并没被挫折打倒，而是直面痛苦；在悲伤沮丧中并没有颓废，而是在逆境中奋起，继续他的研究。

2.斯托克斯公式

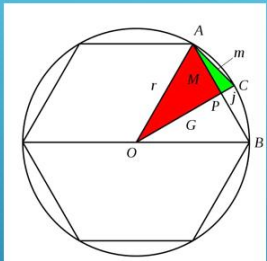
定理 7 设 Γ 为分段光滑的空间有向闭曲线， Σ 是以 Γ 为边界的分片光滑的有向曲面， Γ 的正向与 Σ 的侧符合右手规则， P 、 Q 、 R 在包含曲面 Σ 在内的一个空间区域内具有一阶连续偏导数，则有

$$\oint_{\Gamma} P dx + Q dy + R dz = \iint_{\Sigma} \left(\frac{\partial R}{\partial y} - \frac{\partial Q}{\partial z} \right) dy dz + \left(\frac{\partial P}{\partial z} - \frac{\partial R}{\partial x} \right) dz dx + \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} \right) dx dy$$

思政元素

数学家斯托克斯简介:斯托克斯(1819-1903)，英国数学家、力学家 1819 年 8 月 13 日生于爱尔兰的一个小镇，1903 年 2 月 1 日卒

	于英国剑桥·斯托克斯是六兄妹中最小的一个，从小勤奋好学. 中学学习期间，由于父亲因病去世，家庭已负担不起他的生活开支，他不能寄宿在学校，只能寄居在叔叔家中，但他依 努力学习. 1837 年在彭布罗克学院学习，以在数学方面优异的成绩获得了史密斯奖学金(他是获得此奖学金的第一人). 斯托克斯在对光学和流体动力学进行研究时，推导出了在曲线积分中著名的“斯托斯公式”的定理。直至现代，此定理在数学、物理学等方面都有着重要而深刻的影响。 注意： (1) 由两类曲面间关系，斯托克斯公式另一形式 $\oint_L Pdx + Qdy + Rdz = \iint_{\Sigma} \begin{vmatrix} \cos \alpha & \cos \beta & \cos \gamma \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ P & Q & R \end{vmatrix} ds, \vec{n} = (\cos \alpha, \cos \beta, \cos \gamma) \text{ 为 } \Sigma \text{ 的单元法向量}$ (2) 若 Σ 是 xoy 面上的一块闭区域，则斯托克斯公式变为格林公式，即格林公式为斯托克斯公式的特例。 在积分学部分，所有积分统一于流形上的积分，按流形的维数分为线积分(定积分、对弧长的曲线积分、对坐标的曲线积分)、面积分(二重积分、对面积的曲线积分、对坐标的曲面积分)、体积分(三重积分). 两类曲线(面)积分，既有区别又有联系，可以相互转化，统一于线(面)积分，三大公式(格林公式、高斯公式、斯托克斯公式)从内容和逻辑两个维度相互蕴含，统一于流形上的斯托克斯定理。 思政元素 唯物辩证法——以联系发展的观点看问题。
分析评价	本案例由应用问题出发，创设情境，激发学生对曲线积分和曲面积分的兴趣，培养学生求真创新的科学态度。通过介绍高斯、格林、斯托克斯等数学家的生平，让学生学习数学家自强不息的精神品格，树立独立解决问题的信心，培养学生尊重科学和热爱科学的习惯，确立正确的人生观。
评价者	杨存典教授，商洛学院学生处

案例编号	AME047
案例标题	常数项级数的概念
案例来源	购买
内容简介	从介绍中国古代的数学成就出发，引出常数项级数的相关定义，让学生理解概念的同时对中国古代相关数学历史有了深入了解，形成科学的历史观，激发同学们强烈的民族自豪感。
关键词	常数项级数；部分和；和；等比级数
编写时间	2022-3-1
编著者	余亚辉等，洛阳理工学院
素材形式	文字、图片等
育人主题	形成科学的历史观，激发强烈的民族自豪感
素材长度	1020
案例正文	一. 常数项级数的概念 首先，从公元前 300 年我国著名哲学家庄周所著的《庄子·天下篇》里关于无穷级数的数学思想讲起，自然的引出无穷级数及其收敛的概念。 《庄子·天下篇》： “一尺之棰，日取其半，万世不竭。” 将每天截下那一部分的长度“加”起来就是一个无穷级数： $\frac{1}{2} + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{2^3} + \cdots + \frac{1}{2^n} + \cdots,$ 再谈到魏晋时代，数学家刘徽应用无穷级数的概念来计算圆的面积，发明割圆术，比西方早了一千多年。  “割之弥细，所失弥少， 割之又割以至于不可割， 则与圆合体而无所失矣。” -----刘徽

定义 1 设有数列 $u_1, u_2, \dots, u_n, \dots$, 称 $\sum_{n=1}^{\infty} u_n = u_1 + u_2 + \dots + u_n + \dots$ 为常数项级数, 简称常数项级数。

其中 u_n 称为级数的通项(或一般项或第 n 项); $S_n = \sum_{k=1}^n u_k$ 称为级数的部分和(或前 n 项和); $\{S_n\}$ 称为级数的部分和数列。

由部分和数列 $\{S_n\}$ 的敛散性有:

定义 2 若数项级数 $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ 的部分和数列 $\{S_n\}$ 有极限, 且极限值为 s , 即 $\lim_{n \rightarrow \infty} S_n = s$, 则称级数 $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ 收敛, 极限值 s 称为此级数的和, 此时 $s = \sum_{n=1}^{\infty} u_n = u_1 + u_2 + \dots + u_n + \dots$

当 $\lim_{n \rightarrow \infty} S_n$ 不存在时, 则称级数 $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ 发散。

思政元素: 从公元前 300 年我国著名哲学家庄周所著的《庄子·天下篇》里关于无穷级数的数学思想讲起, 再谈到魏晋时代, 数学家刘徽应用无穷级数的概念来计算圆的面积, 发明割圆术, 自然的引出无穷级数及其收敛的概念。

介绍无穷级数的历史和起源, 展示数学之美, 特别介绍我国古代数学家的卓越贡献, 培养科学的历史观, 增强学生的自信心和民族自豪感。

例 1 讨论如下几何级数(又称为等比级数)的敛散性。

$$\sum_{n=0}^{\infty} aq^n = a + aq + aq^2 + \dots + aq^n + \dots$$

解 如果 $|q| \neq 1$, 则部分和为

$$S_n = a + aq + aq^2 + \dots + aq^{n-1} = a \cdot \frac{1 - q^n}{1 - q}.$$

当 $|q| < 1$ 时, $\lim_{n \rightarrow \infty} S_n = \frac{a}{1 - q}$, 几何级数收敛;

案例正文	当$q > 1$时, $\lim_{n \rightarrow \infty} q^n = \infty$, 所以$\lim_{n \rightarrow \infty} S_n = \infty$, 几何级数发散; 当$q = 1$时, $S_n = na$, 所以$\lim_{n \rightarrow \infty} S_n = \infty$, 几何级数发散; 当$q = -1$时, 这时级数成为$a - a + a - a + a - \dots$, 其部分和为 $S_n = \begin{cases} 0, & \text{当 } n \text{ 为偶数时;} \\ a, & \text{当 } n \text{ 为奇数时;} \end{cases}$ 所以此时S_n的极限不存在, 级数发散。 根据以上的讨论, 可以得到几何级数的敛散性: 当$q < 1$时, 几何级数收敛, 且其和$\frac{a}{1-q}$; 当$q \geq 1$时, 几何级数发散. 例 2 判别级数$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n(n+1)} = \frac{1}{1 \cdot 2} + \frac{1}{2 \cdot 3} + \dots + \frac{1}{n(n+1)} + \dots$的敛散性. 解: 由于$u_n = \frac{1}{n(n+1)} = \frac{1}{n} - \frac{1}{n+1}$, 所以, $S_n = 1 - \frac{1}{n+1} \rightarrow 1$ 于是级数收敛于和 1.
分析评价	从介绍中国古代的数学成就出发, 引出常数项级数的相关定义, 让学生理解概念的同时对中国古代相关数学历史有了深入了解, 形成科学的历史观, 激发同学们强烈的民族自豪感。
评 价 者	杨存典教授, 商洛学院学生处

案例编号	AME048
案例标题	正项级数及其审敛法
案例来源	购买
内容简介	由正项级数的引入，教给学生从特殊到一般的分析方法。通过比较法和比值法，根值法的对比，让学生明白不要养成盲目依靠别人的习惯，要加强自我修养，树立自力更生，自己的问题自己解决的理念。
关键词	正项级数，比较判别法，比值判别法
编写时间	2022-3-1
编著者	余亚辉等，洛阳理工学院
素材形式	文字、图片等
育人主题	从特殊到一般的分析方法；独立自主，自力更生
素材长度	1064
案例正文	一般情况下，利用定义或级数的性质来判别级数的敛散性是很困难的，于是先介绍正项级数这一特殊的级数的敛散性问题，再研究一般的级数。 一、正项级数的定义及审敛法 定义 1 若级数 $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ 中的每一项都是非负的（即 $u_n \geq 0, n=1,2,\dots$），则称级数 $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ 为正项级数。 思政元素：由正项级数谈到正能量，引导学生要有积极向上的世界观、人生观、价值观，人人都应该汲取正能量、传播正能量，做充满希望的人和事。 对于正项级数，由于 $u_n \geq 0$，因而 $S_{n+1} = S_n + u_{n+1} \geq S_n$，所以正项级数 $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ 的部分和数列 $\{S_n\}$ 必为单调增加数列，即 $S_1 \leq S_2 \leq \dots \leq S_{n-1} \leq S_n \leq \dots$ 如果部分和数列 $\{S_n\}$ 有界，则由数列极限存在准则知道，单调有界数列必有极限，所以 $\lim_{n \rightarrow \infty} S_n$ 存在，此时正项级数收敛；反之，若正项级数收敛，即 $\lim_{n \rightarrow \infty} S_n = S$，则数列 $\{S_n\}$ 必有界，由此得到如下定理：

定理 1 正项级数 $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ 收敛的充分必要条件是：它的前 n 项部分和数列 $\{s_n\}$ 有界.

借助于正项级数收敛的充分必要条件，我们可建立一系列具有较强实用性的正项级数审敛法.

1、（比较审敛法）设 $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ 和 $\sum_{n=1}^{\infty} v_n$ 都是正项级数，且 $u_n \leq v_n$ ($n=1,2,\cdots$) 则：

- 1) 如 $\sum_{n=1}^{\infty} v_n$ 收敛，则 $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ 亦收敛；
- 2) 如 $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ 发散，则 $\sum_{n=1}^{\infty} v_n$ 亦发散.

例 1 讨论 p -级数

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^p} = 1 + \frac{1}{2^p} + \frac{1}{3^p} + \cdots + \frac{1}{n^p} + \cdots$$

的敛散性，其中 $p > 0$.

解 (1) 若 $0 < p \leq 1$ ，则 $n^p \leq n$ ，可得 $\frac{1}{n^p} \geq \frac{1}{n}$ ；又因调和级数 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$ 发散，由定理 2 知 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^p}$ 发散.

(2) 若 $p > 1$ ， s_n 有界，级数 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^p}$ ($p > 1$) 是收敛的.

综上所述，当 $0 < p \leq 1$ 时， p -级数 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^p}$ 是发散的；当 $p > 1$ 时， p -级数 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^p}$ 是收敛的。 p -级数是一个很重要的级数，在解题中往往会充当比较审敛法的比较对象，其它的比较对象主要有几何级数、调和级数等。

2、比值审敛法（达朗贝尔判别法）

若正项级数 $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ 满足 $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{u_{n+1}}{u_n} = \rho$ ，则：

- (1) 当 $\rho < 1$ 时，级数 $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ 收敛；
- (2) 当 $\rho > 1$ (或 $\rho = +\infty$) 时，级数 $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ 发散；

案例正文	注意: 1.比值审敛法不需要寻找参考级数, 仅从自身出发就可以判断正项级数的敛散性。 2.对于利用比值审敛法失效的情形(即 $\rho=1$ 时), 其级数的敛散性应另寻它法加以判定, 通常可用构造更精细的比较级数来判别. 例 2 判定下列级数的敛散性 (1) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdots (n-1)}$ (2) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^n}{n!}$ 解(1) 因 $u_n = \frac{1}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdots (n-1)}$, 故 $\rho = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{u_{n+1}}{u_n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} = 0 < 1$ 由比值审敛法知该级数是收敛的. (2) 因 $u_n = \frac{n^n}{n!}$, 故 $\rho = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{u_{n+1}}{u_n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(n+1)^{n+1} \cdot n!}{n^n \cdot (n+1)!} = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n = e > 1$ 由比值审敛法知级数 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^n}{n!}$ 是发散的. 3、根值审敛法或柯西审敛法 若正项级数 $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ 满足 $\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{u_n} = \rho$, 则: (1) 当 $\rho < 1$ 时, 级数 $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ 收敛; (2) 当 $\rho > 1$ (或 $\rho = +\infty$) 时, 级数 $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ 发散; (3) 当 $\rho = 1$ 时, 级数 $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ 的敛散性用此法无法判定. 例 3 判定下列级数的敛散性 (1) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{[\ln(1+n)]^n}$ (2) $\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{b}{a_n}\right)^n$, 其中 $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = a$, 且 $a, b, a_n > 0$ 解: (1) 因 $u_n = \frac{1}{[\ln(1+n)]^n}$, 则 $\rho = \lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{u_n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{\ln(1+n)} = 0 < 1$ 故原级数收敛.
-------------	---

	(2) 因 $u_n = (\frac{b}{a})^n$, 则 $\rho = \lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{u_n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{b}{a} = \frac{b}{a}$, 所以 当 $\frac{b}{a} < 1$, 即 $b < a$ 时, 原级数收敛; 当 $\frac{b}{a} > 1$, 即 $b > a$ 时, 原级数发散; 当 $\frac{b}{a} = 1$, 即 $b = a$ 时, 由于 $\lim_{n \rightarrow \infty} u_n \neq 0$, 从而原级数发散。 思政元素: 由正项级数的引入, 教给学生从特殊到一般的分析方法。通过比较判别法和比值判别法, 根值判别法的对比, 让学生明白自己能解决的问题尽量不麻烦别人, 不要养成盲目依靠别人的习惯, 要加强自我修养, 树立独立自主, 自力更生, 自己的问题自己解决的理念。
分析评价	由正项级数的引入, 教给学生从特殊到一般的分析方法。通过比较法和比值法, 根值法的对比, 让学生明白不要养成盲目依靠别人的习惯, 要加强自我修养, 树立自力更生, 自己的问题自己解决的理念。
评 价 者	杨存典教授, 商洛学院学生处

案例编号	AME049
案例标题	函数展开成幂级数
案例来源	购买
内容简介	通过讲解泰勒级数，麦克劳林级数，引导学生学习数学家泰勒的伟大之处；通过学习间接展开法，鼓励学生要合理智慧的使用已有的优秀成功，在此基础上继续努力，最终会有所突破。
关键词	泰勒公式，麦克劳林公式，泰勒级数，麦克劳林级数，间接展开法
编写时间	2022-3-1
编著者	余亚辉等，洛阳理工学院
素材形式	文字、图片等
育人主题	认识到大数学家泰勒的伟大之处，充分利用前任的智慧，继续突破
素材长度	1366
案例正文	一、泰勒级数 前面讨论了幂级数的收敛域及其和函数的性质。但在许多应用中，我们遇到的却是相反的问题：给定函数 $f(x)$，要考虑它是否能在某个区间内“展开成幂级数”，也就是说，是否能找到这样一个幂级数，它在某区间内收敛，且其和恰好就是给定的函数 $f(x)$，如果能找到这样的幂级数，我们就说，函数在该区间内能展开成幂级数，而这个幂级数在该区间内就表达函数 $f(x)$。 1、泰勒公式 如果 $f(x)$ 在点 x_0 的某邻域内有直到 $n+1$ 的导数，则对此邻域内任一 x 有 $f(x) = f(x_0) + \frac{f'(x_0)}{1!}(x-x_0) + \frac{f''(x_0)}{2!}(x-x_0)^2 + \dots + \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x-x_0)^n + \frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!}(x-x_0)^{n+1}, \quad (\text{其中 } \xi \text{ 在 } x \text{ 与 } x_0 \text{ 之间})$ 上式称为 $f(x)$ 的 n 阶泰勒展开式或泰勒公式，利用泰勒公式，我们可以用一个关于 $(x-x_0)$ 的 n 次多项式。 $p_n(x) = f(x_0) + \frac{f'(x_0)}{1!}(x-x_0) + \frac{f''(x_0)}{2!}(x-x_0)^2 + \dots + \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x-x_0)^n$

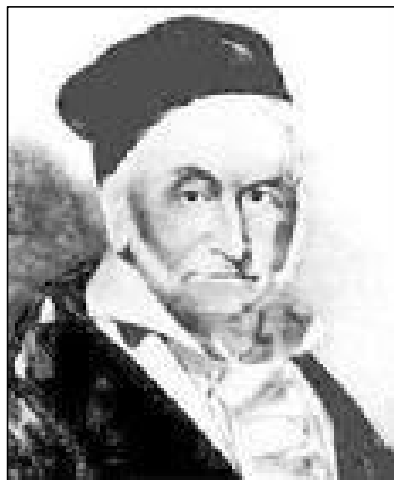
$$R_n(x) = f(x) - p_n(x) = \frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!} (x - x_0)^{n+1} \quad \text{估计误差}.$$

在泰勒公式中，当 $x_0 = 0$ 时，记 $\xi = \theta x$ ， $0 < \theta < 1$ ，此时公式成为

$$f(x) = f(0) + \frac{f'(0)}{1!}x + \frac{f''(0)}{2!}x^2 + \dots + \frac{f^{(n)}(0)}{n!}x^n + \frac{f^{(n+1)}(\theta x)}{(n+1)!}x^{n+1}.$$

称为 $f(x)$ 的麦克劳林公式，或称为按 x 的幂展开的泰勒公式。

思政元素：数学家泰勒的故事。



布鲁克·泰勒 (Brook Taylor 1685 年 8 月 18 日—1731 年 11 月 30 日) 英国著名数学家，有限差分理论的奠基者，主要以泰勒公式和泰勒级数出名，同时还是一位富有才华的音乐家和画家。虽然泰勒是一名非常杰出的数学家，但是泰勒的写作风格过于简洁，不喜欢明确和完整地把他的思路写下来，因此他的许多证明没有遗留下来，这也是他的许多创见未能获得更高声誉的一个原因。

通过介绍数学家泰勒的优点和缺点，教导学生在学习科学家优点的同时，也要认识到不足之处，同时反省自身，做到扬长避短。

2、泰勒级数

如果 $f(x)$ 在点 x_0 的某邻域内具有各阶导数 $f'(x)$ ， $f''(x)$ ， $\dots$ ， $f^{(n)}(x)$ ， $\dots$ ，我们称级数

$$f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0) + \frac{f''(x_0)}{2!}(x - x_0)^2 + \dots + \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x - x_0)^n + \dots$$

为 $f(x)$ 在 $x = x_0$ 的泰勒级数。特别当 $x_0 = 0$ 时，则称它为 $f(x)$ 的麦克劳林级数。即

$$f(0) + f'(0)x + \frac{f''(0)}{2!}x^2 + \dots + \frac{f^{(n)}(0)}{n!}x^n + \dots$$

泰勒级数是泰勒多项式从有限项到无限项的推广，于是，带来了两个问题：一个是该级数在什么条件下收敛，二是该级数是否收敛于函数 $f(x)$ ，关于这些问题，有下述定理。

定理 设函数 $f(x)$ 在点 x_0 的某一邻域内具有各阶导数，则 $f(x)$ 在该邻域内能展开成泰勒级数的充要条件是 $f(x)$ 的泰勒公式中的余项 $R_n(x)$ 当 $n \rightarrow \infty$ 时的极限为零。即

$$\lim_{n \rightarrow \infty} R_n(x) = 0.$$

案例正文	特别地, 当 $x_0 = 0$ 时 $f(x) = f(0) + \frac{f'(0)}{1!}x + \frac{f''(0)}{2!}x^2 + \cdots + \frac{f^{(n)}(0)}{n!}x^n + \cdots$ 称为函数 $f(x)$ 可展开成麦克劳林级数. 显然, 将函数 $f(x)$ 在 $x = x_0$ 处展开成泰勒级数, 可通过变量替换 $t = x - x_0$, 化归为函数 $f(x) = f(t + x_0) = F(t)$ 在 $t = 0$ 处的麦克劳林展开. 因此, 我们将着重讨论函数的麦克劳林展开. 二、函数展开成幂级数的方法 1、直接展开法 由以上讨论结果可以看出, 直接按公式将所给函数 $f(x)$ 展开成 x 的幂级数的步骤是: (1) 求出 $f(x)$ 各阶导数 $f'(x), f''(x), \cdots, f^{(n)}(x), \cdots$, (2) 求 $f(x_0), f'(x_0), f''(x_0), \cdots, f^{(n)}(x_0), \cdots$; (3) 求出幂级数 $f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0) + \frac{f''(x_0)}{2!}(x - x_0)^2 + \cdots + \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x - x_0)^n + \cdots$ 求出收敛半径 R; (4) 考察余项 $R_n(x)$ 的极限, 并给出收敛域。 例 1 将函数 $f(x) = e^x$ 展开成 x 的幂级数 解 求出各阶导数 $f'(x) = e^x, f''(x) = e^x, \cdots, f^{(n)}(x) = e^x, \cdots$ 于是 $f(0) = 1, f'(0) = 1, f''(0) = 1, \cdots, f^{(n)}(0) = 1, \cdots$ 故得级数 $1 + x + \frac{x^2}{2!} + \cdots + \frac{x^n}{n!} + \cdots$ 它的收敛半径为 $R = +\infty$ 对于任何有限数 x, ξ (ξ 在 0 与 x 之间) 余项的绝对值为 $ R_n(x) = \left \frac{e^\xi}{(n+1)!} x^{n+1} \right < \frac{ x ^{n+1}}{(n+1)!} e^{ x }$ 因为 $e^{ x }$ 有限, 而 $\frac{ x ^{n+1}}{(n+1)!}$ 是收敛级数的一般项, 所以, 当 $n \rightarrow \infty$ 时, $\frac{ x ^{n+1}}{(n+1)!} e^{ x } \rightarrow 0 \quad \text{即} \quad \lim_{n \rightarrow \infty} R_n(x) = 0$ 所以得展开式 $e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \cdots + \frac{x^n}{n!} + \cdots \quad (-\infty < x < +\infty)$ 这种直接方法计算量较大, 而且最后要考察余项 R_n 是否收敛于零, 这是一件很不容易的事情.
------	--

案例正文	2 间接展开法 以上两个例子是用直接方法（直接按公式 $a_n = \frac{f^{(n)}(0)}{n!}$ 计算幂级数的系数）展开成幂级数的，下面，我们利用幂级数本身的性质，如四则运算，逐项微分，逐项积分等，把函数 $f(x)$ 展开成为 x 的幂级数，这样计算简单，而且往往可以避免直接研究余项，根据函数展开的唯一性，可知这与直接方法所得的结果一样。 例 1 已知函数 $f(x) = \sin x$ 展开成 x 的幂级数 $\sin x = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \dots + (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!} + \dots \quad (-\infty < x < +\infty)$ 把函数 $f(x) = \cos x$ 展开成 x 的幂级数 解 如把它逐项微分，就得到 $\cos x = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \dots + (-1)^n \frac{x^{2n}}{(2n)!} + \dots \quad (-\infty < x < +\infty)$ 思政元素：间接展开法告诉我们，转换解题的思路，可能会使问题解决更便捷，但间接展开法的使用也离不开直接展开法做好的铺垫，因此，一个人的成功离不开前人的指引和启迪，科学上的进步更是要靠一代一代人前赴后继不断努力的结果。
分析评价	通过讲解泰勒级数，麦克劳林级数，引导学生学习数学家泰勒的伟大之处；通过学习间接展开法，鼓励学生要合理智慧的使用已有的优秀成功，在此基础上继续努力，最终会有所突破。
评 价 者	杨存典教授，商洛学院学生处

案例编号	AME050
案例标题	函数展开成幂级数
案例来源	原创
内容简介	案例介绍被称为黄金分割数列的斐波那契数列，通过思考该数列的通项形式引出函数展开成幂级数。鼓励学生合理利用他人的智慧和既有成果，在此基础上继续努力，最终有所突破。
关键词	幂级数；和函数；收敛半径；收敛域
编写时间	2021-8-27
编著者	马春洁助教，数学与计算机应用学院
素材形式	文字等
育人主题	数学与生活密不可分，学好数学，把数学作为工具，去研究客观世界，服务与生产和生活。
素材长度	1456
案例正文	一. 数学文化，引出课程 斐波那契数列（Fibonacci sequence），又称黄金分割数列，因数学家莱昂纳多·斐波那契以兔子繁殖为例而引入，故又称“兔子数列”，指的是这样一个数列：0、1、1、2、3、5、8、13、21、34、...，该数列在现代物理、准晶体结构、化学等领域都有直接的应用，还可以在植物的叶、枝、茎等排列中发现，观察延龄草、野玫瑰、南美血根草、大波斯菊、金凤花、耬斗菜、百合花、蝴蝶花的花瓣，可以发现它们花瓣数目具有斐波那契数：3、5、8、13、21..... 在数学上，斐波那契数列以如下递推的方法定义： $F(0)=0, F(1)=1, F(n)=F(n-1)+F(n-2)(n \geq 2, n \in \mathbb{N}^*)$ 如何来求该数列通项 $F(n)$ 呢？为了解决这个问题，需要引入函数展开成幂级数 思政元素 神奇的斐波那契数列,又称黄金比数列，经常出现在我们眼前，比如松果、凤梨、树叶的排列，某些花朵的花瓣数，蜂巢，蜻蜓翅膀，超越数 e，黄金分割，黄金矩形、角螺线、十二平均律等 育人目标 数学与生活密不可分，学好数学，把数学作为工具，去研究客观世界，服务与生产和生活。 二. 带着问题，给出概念 1 泰勒公式的定义 定理 1 如果 $f(x)$ 在点 x_0 的某邻域内有直到 $n+1$ 的导数. 则对此邻域内任一 x 有

$$f(x) = f(x_0) + \frac{f'(x_0)}{1!}(x-x_0) + \frac{f''(x_0)}{2!}(x-x_0)^2 + \dots + \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x-x_0)^n \\ + \frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!}(x-x_0)^{n+1}, \quad (\text{其中 } \xi \text{ 在 } x \text{ 与 } x_0 \text{ 之间})$$

上式称为 $f(x)$ 的 n 阶泰勒展开式或泰勒公式，利用泰勒公式，我们可以用一个关于 $(x-x_0)$ 的 n 次多项式

$$p_n(x) = f(x_0) + \frac{f'(x_0)}{1!}(x-x_0) + \frac{f''(x_0)}{2!}(x-x_0)^2 + \dots + \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x-x_0)^n$$

(也称为泰勒多项式) 来近似的表达函数 $f(x)$ ，并可通过余项

$$R_n(x) = f(x) - p_n(x) = \frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!}(x-x_0)^{n+1} \quad \text{估计误差。}$$

2. 泰勒级数的定义

如果 $f(x)$ 在点 x_0 的某邻域内具有各阶导数 $f'(x)$, $f''(x)$, $\dots$, $f^{(n)}(x)$, $\dots$, 我们称级数

$$f(x_0) + f'(x_0)(x-x_0) + \frac{f''(x_0)}{2!}(x-x_0)^2 + \dots + \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x-x_0)^n + \dots$$

为 $f(x)$ 在 $x = x_0$ 的**泰勒级数**。特别当 $x_0 = 0$ 时，则称它为 $f(x)$ 的**麦克劳林级数**。即

$$f(0) + f'(0)x + \frac{f''(0)}{2!}x^2 + \dots + \frac{f^{(n)}(0)}{n!}x^n + \dots$$

泰勒级数是泰勒多项式从有限项到无限项的推广，于是，带来了两个问题：一个是该级数在什么条件下收敛，二是该级数是否收敛于函数 $f(x)$ ，关于这些问题，有下述定理。

定理 设函数 $f(x)$ 在点 x_0 的某一邻域内具有各阶导数，则 $f(x)$ 在该邻域内能展开成泰勒级数的充要条件是 $f(x)$ 的泰勒公式中的余

项 $R_n(x)$ 当 $n \rightarrow \infty$ 时的极限为零. 即 $\lim_{n \rightarrow \infty} R_n(x) = 0$.

三. 深化概念, 探讨算法

由以上讨论结果可以看出, 直接按公式将所给函数 $f(x)$ 展开成 x 的幂级数的步骤是:

(5) 求出 $f(x)$ 各阶导数 $f'(x)$, $f''(x)$, $\dots$, $f^{(n)}(x)$, $\dots$, 如果在 x_0 (主要讨论 $x_0 = 0$ 的情形) 处某阶导数不存在, 就停止进行;

(6) 求函数及各阶导数在 x_0 处的值

$$f(x_0), f'(x_0), f''(x_0), \dots, f^{(n)}(x_0), \dots;$$

(7) 求出幂级数

$$f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0) + \frac{f''(x_0)}{2!}(x - x_0)^2 + \dots + \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x - x_0)^n + \dots$$

的收敛半径 R ;

(8) 考察当 x 在收敛区间 $(-R, R)$ 内时余项 $R_n(x)$ 的极限

$$\lim_{n \rightarrow \infty} R_n(x) = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!} (x - x_0)^{n+1} \quad (\text{其中 } \xi \text{ 在 } x \text{ 与 } x_0 \text{ 之间})$$

间)

是否为零, 如果为零, 则第三步求出的幂级数就是函数 $f(x)$ 的幂级数展开式; 如果不为零, 幂级数虽然收敛, 但它的和并不是所给的函数 $f(x)$ 。

例 1 将函数 $f(x) = e^x$ 展开成 x 的幂级数

解 求出各阶导数

$$f'(x) = e^x, \quad f''(x) = e^x, \quad \dots, \quad f^{(n)}(x) = e^x, \quad \dots$$

于是 $f(0) = 1, \quad f'(0) = 1, \quad f''(0) = 1, \quad \dots, \quad f^{(n)}(0) = 1, \quad \dots$

故得级数 $1 + x + x^2/2! + \dots + x^n/n! + \dots$

它的收敛半径为 $R = +\infty$,

对于任何有限数 x , ξ (ξ 在 0 与 x 之间) 余项的绝对值为

$$|R_n(x)| = \left| \frac{e^\xi}{(n+1)!} x^{n+1} \right| < \frac{|x|^{n+1}}{(n+1)!} e^{|x|}$$

因为 $e^{|x|}$ 有限, 而 $\frac{|x|^{n+1}}{(n+1)!}$ 是收敛级数的一般项, 所以, 当 $n \rightarrow \infty$ 时,

$$\frac{|x|^{n+1}}{(n+1)!} e^{|x|} \rightarrow 0 \quad \text{即} \quad \lim_{n \rightarrow \infty} R_n(x) = 0$$

所以得展开式 $e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \dots + \frac{x^n}{n!} + \dots \quad (-\infty < x < +\infty)$

例 2 将函数 $f(x) = \sin x$ 展开成 x 的幂级数.

解 求出各阶导数

$$f'(x) = \cos x, f''(x) = -\sin x, f'''(x) = -\cos x, \dots,$$

$$f^{(n)}(x) = \sin\left(x + n\frac{\pi}{2}\right), \dots$$

于是, $f(0)=0, f'(0)=1, f''(0)=0, f'''(0)=-1, \dots$, 顺序循环得这几个数: 0, 1, 0, -1, 于是得级数。

思政元素

函数展开成幂级数蕴含着“由简单到复杂”的原理, 与复杂问题简单化相对立, “简单问题复杂化”看似复杂, 其实是为了新的解决思路, 也是一种智慧。

工程中需要计算一些非特殊函数值, 往往需要通过将函数展开成幂级数来近似计算, 虽然只是近似值, 但是这种方法确实解决问题的好方法。

四. 巩固练习, 拓展应用

从前面例题发现, 用泰勒公式展开一个函数的难易程度取决于该函数的任意阶导数是否容易得到, 在实际问题当中, 对于一般的函数我们很难得到它的任意阶导数, 而且讨论余项的收敛区间也很繁琐、这也意味着用泰勒公式展开一个函数的方法还需要考虑别的方法加以完善, 下面介绍另外一种方法 - 间接展开法

下面, 我们利用幂级数本身的性质, 如四则运算, 逐项微分, 逐项积分等, 把函数 $f(x)$ 展开成为 x 的幂级数, 这样计算简单, 而且往往可以避免直接研究余项, 根据函数展开的唯一性, 可知这与直接方法所得的结果一样。

$$\sin x = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \dots + (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!} + \dots \quad (-\infty < x < +\infty)$$

如把它逐项微分, 就得到

$$\cos x = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \dots + (-1)^n \frac{x^{2n}}{(2n)!} + \dots \quad (-\infty < x < +\infty)$$

例 3 将函数 $f(x) = \ln(1+x)$ 展开成 x 的幂级数.

解 因为 $f'(x) = \frac{1}{1+x}$, 而 $\frac{1}{1+x}$ 是收敛的几何级数 $\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n x^n$

$(-1 < x < 1)$ 的和函数, 即

$$\frac{1}{1+x} = 1 - x + x^2 - x^3 + \dots + (-1)^n x^n + \dots \quad (-1 < x < 1)$$

所以将上式从 0 到 x 逐项积分, 得

$$\ln(1+x) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} + \dots + (-1)^n \frac{x^{n+1}}{n+1} + \dots \quad (-1 < x \leq 1)$$

此展开式对于 $x=1$ 也是正确的, 于是有

$$\ln 2 = 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \dots + (-1)^{n+1} \frac{1}{n} + \dots$$

例 5

函数 $f(x) = \sin x$ 展开成 $\left(x - \frac{\pi}{4}\right)$ 的幂级数

$$\begin{aligned} \text{解 因为 } \sin x &= \sin \left[\frac{\pi}{4} + \left(x - \frac{\pi}{4} \right) \right] \\ &= \sin \frac{\pi}{4} \cos \left(x - \frac{\pi}{4} \right) + \cos \frac{\pi}{4} \sin \left(x - \frac{\pi}{4} \right) \\ &= \frac{1}{\sqrt{2}} \left[\cos \left(x - \frac{\pi}{4} \right) + \sin \left(x - \frac{\pi}{4} \right) \right] \end{aligned}$$

用公式表中 (2)、(3) 得

$$\cos \left(x - \frac{\pi}{4} \right) = 1 - \frac{\left(x - \frac{\pi}{4} \right)^2}{2!} + \frac{\left(x - \frac{\pi}{4} \right)^4}{4!} - \dots \quad (-\infty < x < +\infty)$$

$$\sin \left(x - \frac{\pi}{4} \right) = \left(x - \frac{\pi}{4} \right) - \frac{\left(x - \frac{\pi}{4} \right)^3}{3!} + \frac{\left(x - \frac{\pi}{4} \right)^5}{5!} - \dots \quad (-\infty < x < +\infty)$$

	两式相加，就有 $\sin x = \frac{1}{\sqrt{2}} \left[1 + \left(x - \frac{\pi}{4} \right) - \frac{\left(x - \frac{\pi}{4} \right)^2}{2!} - \frac{\left(x - \frac{\pi}{4} \right)^3}{3!} + \dots \right]$ $(-\infty < x < +\infty)$ 思政元素 间接展开法告诉我们，合理利用已有成果，可能处理起来更便捷，牛顿说：“我之所以能成功，是因为我站在巨人的肩上，”一个人的成功离不开前人的指引和提拔，或者科学上的进步是要靠一代一代人前赴后继不断努力的结果。 五. 教学反思 本教学设计先介绍被称为黄金分割数列的斐波那契数列，通过思考该数列的通项形式引出函数展开成幂级数，再讲解泰勒公式、麦克劳林公式、泰勒级数和麦克劳林级数的定义，以及函数展成幂级数的直接方法和间接方法，最后讲解例题和应用案例。教育学生既要认识到大数学家泰勒的伟大之处，也要摒弃他不喜欢明确和完整地把他的思路写下来的陋习，通过间接展开法，鼓励学生合理利用他人的智慧和既有成果，在此基础上继续努力，最终有所突破。
分析评价	本案例介绍被称为黄金分割数列的斐波那契数列，通过思考该数列的通项形式引出函数展开成幂级数。鼓励学生合理利用他人的智慧和既有成果，在此基础上继续努力，最终有所突破。
评价者	杨存典教授，商洛学院学生处